

ZHAW Zurich University of Applied Sciences
Winterthur

Lab 01 Numerik

Autoren: Lienhard Yannick,
Sprenger Severin

Dozenten: Simon Stingelin

Analyse der Fehler

Im Log-Log-Plot des Fehlers in Abhängigkeit der Schrittweite h zeigt sich eine typische U-förmige Kurve. Dies ist auf das Zusammenspiel zweier Fehlerarten zurückzuführen:

1. Diskretisierungsfehler (Trunkationsfehler) Dieser entsteht durch die Taylor-Approximation der Funktion. Für grosse h dominiert dieser Fehler.

Für den Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzenquotienten gilt:

$$\Delta_h f(x_0) = f'(x_0) + \mathcal{O}(h)$$

Der Fehler ist also proportional zu h .

Für den zentralen Differenzenquotienten gilt:

$$\Delta_{2h} f(x_0) = f'(x_0) + \mathcal{O}(h^2)$$

Der Fehler ist hier proportional zu h^2 .

2. Rundungsfehler Für sehr kleine h treten Rundungsfehler auf, da bei der Berechnung

$$f(x_0 + h) - f(x_0)$$

zwei nahezu gleiche Zahlen subtrahiert werden. Dies führt zum Verlust signifikanter Stellen (*catastrophic cancellation*).

Optimale Schrittweite Für grosse h dominiert der Diskretisierungsfehler, für kleine h der Rundungsfehler. Dazwischen existiert ein optimales h , bei dem beide Fehler etwa gleich gross sind.

Fehlerordnung des Vorwärtsdifferenzenquotienten

Die Taylorentwicklung von $f(x_0 + h)$ lautet:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \mathcal{O}(h^3)$$

Einsetzen in den Differenzenquotienten ergibt:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{h}{2}f''(x_0) + \mathcal{O}(h^2)$$

Der führende Fehlerterm ist proportional zu h . Damit besitzt der Vorwärtsdifferenzenquotient die Fehlerordnung

$$\mathcal{O}(h).$$

Fehlerordnung des zentralen Differenzenquotienten

Die Taylorentwicklungen lauten:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \mathcal{O}(h^4)$$

Subtrahiert man beide Entwicklungen, so erhält man:

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2hf'(x_0) + \frac{h^3}{3}f'''(x_0) + \mathcal{O}(h^5)$$

Division durch $2h$ ergibt:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0) + \frac{h^2}{6}f'''(x_0) + \mathcal{O}(h^4)$$

Der führende Fehlerterm ist proportional zu h^2 .

Damit besitzt der zentrale Differenzenquotient die Fehlerordnung

$$\mathcal{O}(h^2).$$

Vektorisierung mit NumPy

Anstelle einer for-Schleife kann NumPy elementweise Operationen auf Arrays durchführen. Ist $H = (h_1, \dots, h_n)$ ein Array von Schrittweiten, so kann man direkt berechnen:

$$f(x_0 + H)$$

Dies liefert ein Array mit allen Funktionswerten. Die Differenzenquotienten können dadurch gleichzeitig für alle h berechnet werden.

Dies ist effizienter, mathematisch klarer und vermeidet explizite Schleifen in Python.