# ZHAW Zurich University of Applied Sciences Winterthur



## Zusammenfassung EL2 Studienwochen 1-14

Written by: Severin Sprenger & Yannick Lienhard October 13, 2025 Zf. EL2 SW 1-14



## Contents

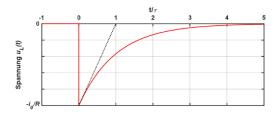
1	Spu	le 2
1	-	
	1.1	Entladevorgang
	1.2	Ladevorgang
0	T/	1 C' 1
2		nplexe Signale
	2.1	Spanning und Strom
	2.2	Impedanzen
	2.3	Admittanz
	2.4	Widerstand
	2.5	Kondensator
	2.6	Spule
3	Leis	tung 3
	3.1	Momentanleistung
	3.2	Effektive Leistung
	3.3	Komplexe Leistung (Scheinleistung)
	5.5	
		3.3.2 Bildleistung
		3.3.3 Blindleistungskompensation
	3.4	Leistungsfaktor (Wirkfaktor)
	<u></u> .	
4		ertragungsfunktion
	4.1	Bode-Plot
	4.2	Filter
	4.3	Schwingkreise
	4.4	Normalisierte Frequenz
	4.5	Normalisierte Übertragungsfunktion
	4.6	Bandbreite
	4.7	Idealer Widerstand
	4.8	Integrierer
	4.9	<u> </u>
	-	1
	4.10	Tiefpass 2. Ordnung
5	Das	le Bauelemente
Э		
	5.1	Widerstand
		5.1.1 Berechnen von L & C
	5.2	Kondensator
		5.2.1 Vereinfachte Modelle
		5.2.2 Verlustfaktor, Verlustwinkel & Güte
	5.3	Spule
		5.3.1 Vereinfachte Modelle
		5.3.2 Verlustfaktor, Verlustwinkel & Güte
	5.4	Umrechnen von ESBs bei fixen Frequenzen
	0.1	omeomon ton 2020 out mon frequences vivial v
6	Indi	ıktion 11
Ū	6.1	Lorentzkraft (Copy-Paste von PHY2 ZF)
	6.2	Biot-Savart-Gesetz
	6.3	
		Magnetfeld eines langen, geraden Leiters
	6.4	Lange Zylinderspule
7	וים וים	this sho Indultion
7		trische Induktion 12
	7.1	Magnetische Fluss
		7.1.1 Magnetfeld rechtwinkling zur flachen Fläche
		7.1.2 Magnetfeld mit einem Winkel zur flachen Fläche
		7.1.3 Spule mit externem Magnetfeld
		7.1.4 Stromdurchflossene Spule ohne ext. Magnetfeld
	7.2	Findings

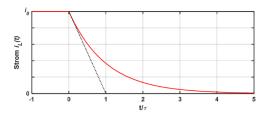


### 1 Spule

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$
$$= L \cdot \dot{i}(t)$$

#### 1.1 Entladevorgang



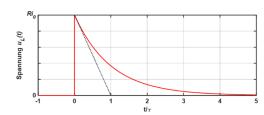


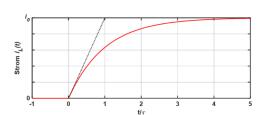
$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$i_L(t) = I_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$u_L(t) = -R \cdot I_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

#### 1.2 Ladevorgang





$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$i_L(t) = I_0 \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

$$u_L(t) = R \cdot I_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

## 2 Komplexe Signale

#### 2.1 Spanning und Strom

$$\underline{U} = \hat{U} \cdot e^{j \cdot \varphi_U} \to \underline{U}(t) = \underline{U} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$$

$$\underline{I} = \hat{I} \cdot e^{j \cdot \varphi_I} \to \underline{U}(t) = \underline{I} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$$

$$\varphi = \varphi_U - \varphi_I$$



#### 2.2 Impedanzen

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}(t)}{\underline{I}(t)}$$

$$= \frac{\underline{U} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}}{\underline{I} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}}$$

$$= \underbrace{x}_{R} + \underbrace{y}_{+L/-C}$$

$$= |Z| \cdot e^{j \cdot \varphi_{Z}}$$

$$= \frac{\operatorname{Re}(\underline{Y})}{\underline{Y}^{2}} - \frac{\operatorname{Im}(\underline{Y})}{\underline{Y}^{2}} \cdot j$$

$$\varphi_{Z} = \varphi_{U} - \varphi_{I}$$

#### 2.3 Admittanz

$$\begin{split} \underline{Y} &= \frac{1}{\underline{Z}} \\ &= \frac{\underline{I}(t)}{\underline{U}(t)} \\ &= \frac{\underline{I} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}}{\underline{U} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}} \\ &= \frac{\operatorname{Re}(\underline{Z})}{\underline{Z}^2} - \frac{\operatorname{Im}(\underline{Z})}{\underline{Z}^2} \cdot j \end{split}$$

#### 2.4 Widerstand

$$\underline{Z} = R$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R}$$

#### 2.5 Kondensator

$$\underline{Z} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = \frac{j}{-\omega \cdot C}$$
 
$$\underline{Y} = j \cdot \omega \cdot C$$

#### 2.6 Spule

$$\begin{split} \underline{Z} &= j \cdot \omega \cdot L \\ \underline{Y} &= \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L} = \frac{j}{-\omega \cdot L} \end{split}$$

## 3 Leistung

$$U_{eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$
 
$$I_{eff} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$$

#### 3.1 Momentanleistung

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$



#### 3.2 Effektive Leistung

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_{T} u(t) \cdot i(t) dt$$

#### 3.3 Komplexe Leistung (Scheinleistung)

$$\begin{split} \underline{S} &= \underline{U}\left(t\right) \cdot \underline{I}^*\left(t\right) \\ &= \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot e^{j \cdot \varphi} \\ &= P + Q \cdot j \\ |\underline{S}| &= Z \cdot \hat{I}^2 \cdot e^{j \cdot \varphi_Z} \\ &= \frac{\hat{U}^2}{Z} \cdot e^{j \cdot \varphi_Z} \\ &= \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} \\ [\underline{S}] &= \mathrm{VA} \end{split}$$

#### 3.3.1 Wirkleistung

$$\begin{split} P &= \operatorname{Re}\left(\underline{S}\right) \\ &= |\underline{S}| \cdot \cos\left(\varphi\right) \\ &= \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} \cdot \cos\left(\varphi\right) \\ [P] &= \mathbf{W} \end{split}$$

#### 3.3.2 Bildleistung

$$\begin{split} Q &= \operatorname{Im} \left( \underline{S} \right) \\ &= |\underline{S}| \cdot \sin \left( \varphi \right) \\ &= \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} \cdot \sin \left( \varphi \right) \\ [Q] &= \operatorname{Var} \end{split}$$

#### 3.3.3 Blindleistungskompensation

Das Ziel der Blindleistungskompensation ist die Blindleistungs durch das Anfügen eines Kondensators oder einer Spule auf 0 zu minimieren.

**Ziel:** 
$$\operatorname{Im}(\underline{S}) \stackrel{!}{=} 0 \operatorname{Var}$$
  
 $\Longrightarrow \varphi = 0 \operatorname{rad}$   
 $\Longrightarrow P = \max$   
 $\Longrightarrow \lambda = 1$ 

#### 3.4 Leistungsfaktor (Wirkfaktor)

$$\lambda = \frac{P}{|S|} = \cos\left(\varphi\right)$$

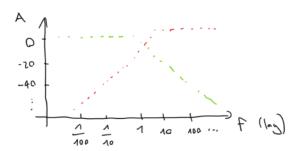


## 4 Übertragungsfunktion

Signal A ist das Eingangssignal und Signal B ist das Ausgangssignal.

$$\begin{split} \underline{H}\left(\omega\right) &= \frac{\underline{U}_{B}\left(t\right)}{\underline{U}_{A}\left(t\right)} \\ &= \frac{\hat{U}_{B} \cdot e^{j \cdot \left(\omega \cdot t + \varphi_{B}\right)}}{\hat{U}_{A} \cdot e^{j \cdot \left(\omega \cdot t + \varphi_{A}\right)}} \\ &= \frac{U_{B}}{U_{A}} \cdot e^{j \cdot \left(\omega \cdot t + \left(\varphi_{B} - \varphi_{A}\right)\right)} \end{split}$$

#### 4.1 Bode-Plot



- Hoch pass 1. Ordnung  $\frac{20 \text{ dB}}{\text{dek}}$
- Tiefpass 1. Ordnung  $\frac{-20 \text{ dB}}{\text{dek}}$

$$\begin{split} &A\left(\omega\right)=20\cdot\log_{10}\left(\left|\underline{H}\left(\omega\right)\right|\right) &\quad\text{- Spannung und Strom}\\ &A\left(\omega\right)=10\cdot\log_{10}\left(\left|\underline{H}\left(\omega\right)\right|\right) &\quad\text{- Leistungen}\\ &\varphi\left(\omega\right)=\arg\left(\underline{H}\left(\omega\right)\right) \end{split}$$

#### 4.2 Filter

Grenzfrequenz  $f_g$  bei -3 dB.

$$\begin{aligned} \text{RC Tiefpass} &\to f_g = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C} \\ \text{LR Tiefpass} &\to f_g = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot L} \\ \text{CR Hochpass} &\to f_g = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C} \\ \text{RL Hochpass} &\to f_g = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot L} \\ w_g &= 2 \cdot \pi \cdot f_g \end{aligned}$$

#### 4.3 Schwingkreise

Resonanzfrequenz  $f_r$  bei  $\text{Im}(\underline{Z}) = 0$ .

RLC Glied, unabhängig von Anordnung 
$$\rightarrow f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$



#### 4.4 Normalisierte Frequenz

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_r}$$

#### 4.5 Normalisierte Übertragungsfunktion

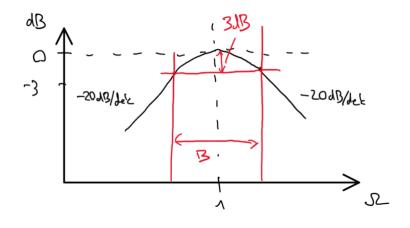
$$\underline{H}\left(\Omega\right) = \frac{1}{1 - \Omega^2 + j \cdot \frac{1}{Q} \cdot \Omega}$$

$$Q \to \text{G\"{u}tefaktor}$$

$$\begin{split} \Omega << 1 \implies & (\underline{H}\left(\Omega\right) \approx 1,\, A\left(\omega\right) = 0 \text{ dB},\, \varphi\left(\Omega\right) \approx 0) \\ \Omega = 1 \implies & (\underline{H}\left(\Omega\right) = \frac{1}{j \cdot \frac{1}{Q}} = -j \cdot Q,\, |\underline{H}\left(\Omega\right)| = Q,\, \varphi\left(\Omega\right) = -\frac{\pi}{2}) \\ \Omega >> 1 \implies & (\underline{H}\left(\Omega\right) \approx \frac{1}{\Omega^2},\, A\left(\omega\right) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{\Omega^2}\right) = \underbrace{-40 \cdot \log_{10}\left(\Omega\right)}_{\text{Gerade mit } -40} \,,\, \varphi\left(\Omega\right) \approx \pi) \end{split}$$

#### 4.6 Bandbreite

Die Bandbreite B oder auch 3 dB-Bandbreite, beschreibt den Abstand zwischen zwei Schnittpunkten  $\Omega^+/\Omega^-$  des Frequenzverhaltens. Die Schnittpunkte werden so gewählt, dass diese in relation zum Resonanzfall eine Dämpfung von 3 dB aufweisen. Die Bandbreite kann entweder aus einem Graphen grob heraus gelesen werden, genau berechnet werden mithilfe der Übertragungsfunktion oder approximiert werden durch das ersetzten der Übertragungsfunktion mit einem Polynom.



$$B = \frac{\omega_r}{Q}$$



4.7 Idealer Widerstand

$$\underline{H}(\Omega) = \text{konst.}$$

4.8 Integrierer

$$\underline{H}\left(\Omega\right) = \frac{1}{j \cdot \Omega} \implies A\left(\Omega\right) = -20 \cdot \log_{10}\left(\Omega\right)$$

4.9 Tiefpass 1. Ordnung

$$\underline{H}\left(\Omega\right) = \frac{1}{1 + j \cdot \Omega}$$

4.10 Tiefpass 2. Ordnung

$$\underline{H}\left(\Omega\right) = \frac{1}{1 - \Omega^{2} + j \cdot \frac{1}{Q} \cdot \Omega}$$

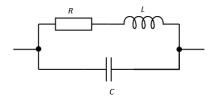


#### 5 Reale Bauelemente

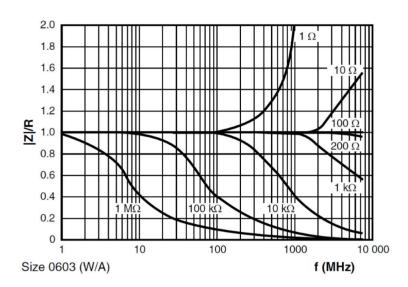
Beschreibt Bauelemente auf eine realistische Art und Weise indem Widerstände, Kapazitäten und Spulen hinzugefügt werden. Diese Dreckeffekte sind beiprodukte von Herstellungsprozessen oder Architekturen.

#### 5.1 Widerstand

Das Temperaturverhalten von Widerständen wurde bereits in EL1 behandelt.



$$\underline{Z} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C + \frac{1}{R + j \cdot \omega \cdot L}}$$



$$\frac{|Z|}{R} < 1 \implies \text{R und C parallel dominant}$$
 
$$\frac{|Z|}{R} > 1 \implies \text{R und L seriell dominant}$$

#### 5.1.1 Berechnen von L & C

#### Für L:

- Kleinen Nennwert wählen
- Bestimmen von +3 dB-Frequenz  $\hat{\omega}$
- $L = \frac{R}{\hat{\omega}}$

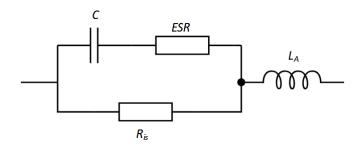
#### Für C:

- Grossen Nennwert wählen
- Bestimmen von -3 dB-Frequenz  $\tilde{\omega}$
- $\bullet \ C = \frac{1}{\tilde{\omega} \cdot R}$

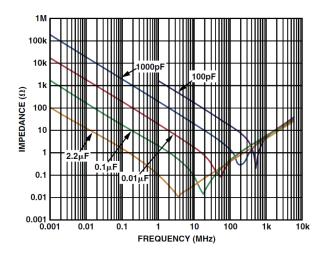


#### 5.2 Kondensator

$$C(T) = C_{20} \cdot (1 + \alpha_{20} \cdot (T - 293 \text{ K}))$$



$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R_{is}} + \frac{1}{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} + R_{ESR}}} + j \cdot \omega \cdot L_A$$



#### 5.2.1 Vereinfachte Modelle

• Keine Selbstentladung:  $R_{is} = \infty \ \Omega \implies \underline{Z} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} + j \cdot \omega \cdot L_A + R_{ESR}$ 

• Kleine Frequenzen:  $R_{is} = \infty \ \Omega, L_A = 0 \ \mathrm{H} \implies \underline{Z} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} + R_{ESR}$ 

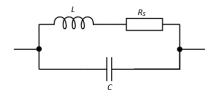
#### 5.2.2 Verlustfaktor, Verlustwinkel & Güte

$$\begin{aligned} d &= \omega \cdot C \cdot R_{ESR} \\ \delta &= \arctan{(d)} \\ Q_C &= \frac{1}{d} = \frac{1}{\omega \cdot C \cdot R_{ESR}} \end{aligned}$$

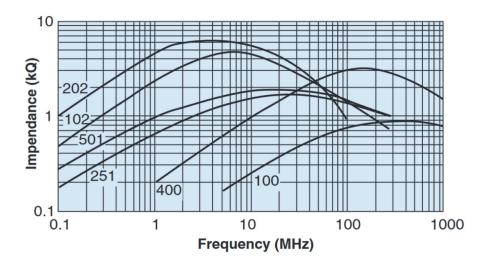
Wichtig:  $Q_C$  ist nicht der Gütefaktor



#### 5.3 Spule



$$\underline{Z} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C + \frac{1}{R_S + j \cdot \omega \cdot L}}$$



#### 5.3.1 Vereinfachte Modelle

• Kleine Frequenzen:  $C = 0 \text{ F} \implies \underline{Z} = R_S + j \cdot \omega \cdot L$ 

#### 5.3.2 Verlustfaktor, Verlustwinkel & Güte

$$d = \frac{R_S}{\omega \cdot L}$$
$$\delta = \arctan(d)$$
$$Q_L = \frac{1}{d} = \frac{\omega \cdot L}{R_S}$$

Wichtig:  $Q_L$  ist nicht der Gütefaktor

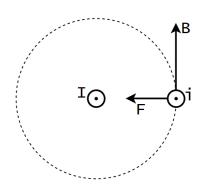
#### 5.4 Umrechnen von ESBs bei fixen Frequenzen

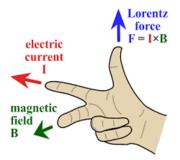
Wenn eine Frequenz fix definiert ist, kann jedes reale Bauelemente vereinfacht oder von Serie- / Parallelschaltung umgewandelt werden. **Aber nur bei fixen Frequenzen**.



#### 6 Induktion

#### 6.1 Lorentzkraft (Copy-Paste von PHY2 ZF)





$$\vec{F} = i \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$
$$= a \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

 $l \to$  Länge des Leiters durch den i fliesst,  $q \to$  Fliessende Ladung,  $v \to$  Geschwindigkeit der fliessenden Ladung,  $\vec{B} \to$  Flussdichte des Leiters im Zentrum

#### 6.2 Biot-Savart-Gesetz

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{\left|\vec{r}\right|^2} \cdot \left(d\vec{l} \times d\vec{r}\right)$$

#### 6.3 Magnetfeld eines langen, geraden Leiters

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{r}$$

#### 6.4 Lange Zylinderspule

$$B = \mu_0 \cdot N \cdot \frac{I}{l}$$
 
$$L = \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{A}{l}$$
 
$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{V \cdot s}{A \cdot m}$$



#### 7 Elektrische Induktion

Veränderndes Magnetfeld in der nähe eines Leiters induziert ein Strom in diesem Leiter. (eg. Reed switch, Trafo)

#### 7.1 Magnetische Fluss

$$\phi_m = \int_A \vec{B} \cdot dA$$
$$u_i = -\dot{\phi_m}$$

7.1.1 Magnetfeld rechtwinkling zur flachen Fläche

$$\phi_m = B \cdot A$$

7.1.2 Magnetfeld mit einem Winkel zur flachen Fläche

$$\phi_m = B \cdot A \cdot \cos(\varphi)$$

7.1.3 Spule mit externem Magnetfeld

$$\phi_m = B \cdot A \cdot N$$

7.1.4 Stromdurchflossene Spule ohne ext. Magnetfeld

$$\phi_m = \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{A}{l} \cdot I$$

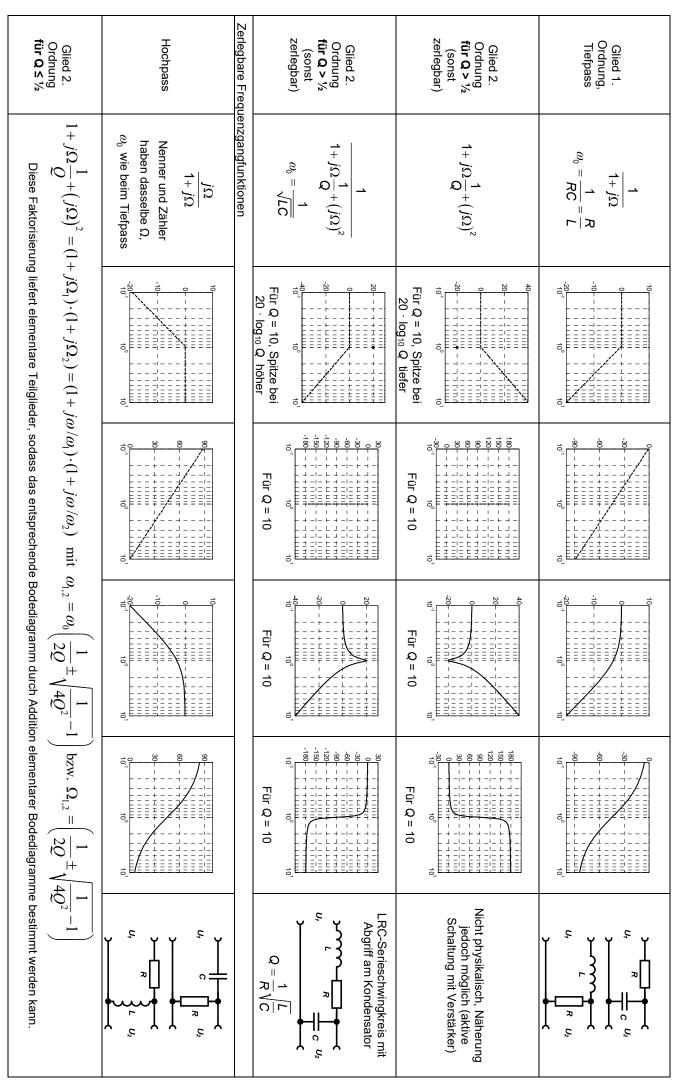
7.2 Findings

$$\phi_m = L \cdot I$$
$$u_i = -\dot{\phi_m} = -L \cdot \dot{I}$$

Dargestellt in Erzeugersystem



Nicht physikalisch, Näherung jedoch möglich (aktive Schaltung mit Verstärker)		10 + + + + + + + + + + + + + + + + +	10° 10° 10° 10° 10° 10° 10° 10° 10° 10°	0 - + + + + + + + + + + + + + + + + + +	$1+j\Omega$	Glied 1. Ordnung
Verhältnis von Strom zur Spannung an der Spule: $\underline{\hat{J}} = \frac{\underline{U}}{j\omega L}$	-80	10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 1	Siehe Bode-Diagramm	Siehe Bode-Diagramm	$\frac{1}{j\Omega}$	Integrierglied
Nicht physikalisch, zwar gilt z.B. $\underline{I} = j\omega C \cdot \underline{U}$ , aber beim Einschalten würde ein unendlich hoher Strom fliessen. Jedoch ist eine Näherung mit sehr kleinem Seriewiderstand möglich.	80	10	Siehe Bode-Diagramm	Siehe Bode-Diagramm	σί	Differentierglied
Invertierender Verstärker (realisierbar z.B. mit Operationsverstärker)	210 180 180 150 1	30 20 10	±180° addieren (Winkel soll möglichst klein werden)	Verschiebung um 20 · log₁₀  k	k	konstanter Faktor <i>k</i> < 0
Nicht-invertierender Verstärker (realisierbar z.B. mit Operationsverstärker)	$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	20 10	Kein Einfluss	Verschiebung um 20 · log₁₀ <i>k</i>	k	konstanter Faktor <i>k</i> > 0
Schaltung	Bode-Diagramm: Phasengang in Grad (x-Achse: Ω)	Bode-Diagramm: Amplitudengang in dB (x-Achse: Ω)	Konstruktion im Bode- Diagramm: Phasengang in Grad (x-Achse: Ω)	Konstruktion im Bode- Diagramm: Amplitudengang in dB (x-Achse: Ω)	Frequenzgangfunktion $H(\Omega)$ mit $\Omega = \omega/\omega_0$	Bezeichnung
				eiter zerlegbar)	Elementare Frequenzgangfunktionen (nicht weiter zerlegbar)	Elementare Frequ



Hinweise: Reim Fi	Bandsperre	Bandpass	LRC- Schwingkreis mit Abgriff an der Spule
neatz von Spullen sind obige	$\frac{1 + (j\Omega)^2}{1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{1}{Q} \frac{j\Omega}{1+j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{(j\Omega)^2}{1+j\Omega\frac{1}{Q}+(j\Omega)^2}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Darstellingen nur nassend v	Skizze über Teilglieder Der Zähler ist ein Glied 2. Ordnung mit Q = ∞, deshalb ist die Dämpfung bei der Mittenfrequenz theoretisch unendlich Bandbreite wie beim Bandpass	Skizze über Teilglieder Je nach Q ergibt sich eine andere Bandbreite, bei ω₀ ist jedoch immer 0 dB Weit entfemt von ω₀: ±20 dB/Dk Definition Bandbreite B: Frequenzbereich von -3 dB bis +3 dB Es gilt: B = ω₀ / Q	20 + + + + + + + + + + + + + + + + +
Hinweise: Reim Einsatz von Spulen sind ohige Darstellungen nur nassend, wenn die Spulenverluste vernachlässigher sind: «nicht physikalisch» = kann mit einer Schaltung aus R. / und C.	Skizze über Teilglieder	Skizze über Teilglieder	210 180 180 190 190 190 190 190 190 190 190 190 19
achlässighar sind: whicht phys	Für Q = 10	Für Q = 1/2  Für Q = 1/2	20
ikalisch» = kann mit einer Sch	Für Q = 10	Für Q = 1/2  Für Q = 1/2	210 180 180 180 180 180 180 180 180 180 1
	LC-Parallelschwingkreis mit Seriewiderstand $u_1$ $u_2$ $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$	LRC-Schwingkreis mit Abgriff am Widerstand	$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

Hinweise: Beim Einsatz von Spulen sind obige Darstellungen nur passend, wenn die Spulenverluste vernachlassigbar sind; «nicht physikalisch» = kann mit einer Schaltung aus K, L und C nicht exakt nachgebildet werden; die obige Aufstellung ist nicht abschliessend, sondern exemplarisch (es gibt viele weitere Schaltungen mit gleichen Frequenzgängen)