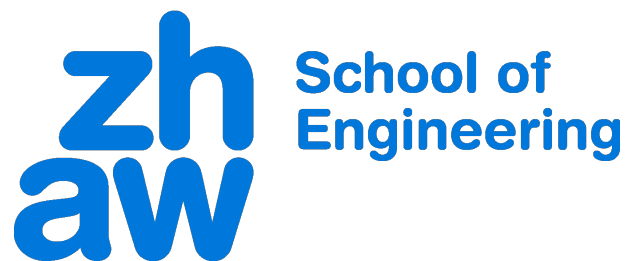


ZHAW Zurich University of Applied Sciences
Winterthur



Zusammenfassung LA2

Studienwochen 1-5

Written by: Severin Sprenger
October 13, 2025
Zf. LA2 SW 1-5

1 Vektorräume

In einem Vektorraum müssen Addition und Skalarmultiplikation definiert sein. Die Ergebnisse dieser Operation müssen ebenfalls in diesem Vektorraum sein. (Definition siehe LA2-V1-F8)

2 Unterräume

Ein Unterraum ist eine Teilmenge eines Vektorraums, der in sich die definition eines Vektorraumes erfüllt.

$$\begin{aligned}U &\subset V \\ u, v \in U &\Rightarrow u + v \in U \\ \lambda \in \mathbb{K}, u \in U &\Rightarrow \lambda \cdot u \in U\end{aligned}$$

2.1 Tipp

Das eine Teilmenge ein Unterraum sein kann muss der Null Vektor teil der Teilmenge sein. Als dies immer zuerst prüfen.

3 Lineare Unabhängigkeit

V ist ein Vektorraum und $v_n \in V, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ist gegeben. Die Vektoren v_n sind linear Unabhängig falls folgendes bewiesen werden kann.

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots \lambda_n = 0$$

4 Lineare Hülle

V ist ein Vektorraum und $v_n \in V$ ist gegeben. Der span ist die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $v_1, \dots, v_n$

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \{v \in V | v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n\}$$

5 Erzeugersystem

V ist ein Vektorraum. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind ein Erzeugersystem, falls die Vektoren den gesamten Vektorraum V aufspannen.

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) = V$$

6 Basis

V ist ein Vektorraum und $\mathcal{B} \subset V$. $\mathcal{B}$ ist die Basis des Vektorraumes V falls:

- $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist.
- $\mathcal{B}$ ein Erzeugersystem von V ist. ($\text{span}(\mathcal{B}) = V$)

7 Normen

7.1 Euklidische Norm

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, x \in \mathbb{R}^n$$

$$\|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}, z \in \mathbb{C}^n$$

7.2 p-Norm

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

7.3 Maximalnorm

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, x_i \in \mathbb{K}^n$$

7.4 Frobenius-Norm

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

7.5 Zeilensummennorm

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

7.6 Spaltensummennorm

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

8 Skalarprodukte

8.1 Standardskalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i, x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle w, z \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{w_i} \cdot z_i, w, z \in \mathbb{C}^n$$

8.2 Skalarprodukt auf L_2

$$\langle f, g \rangle_{L_2} = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) dx$$