ZHAW Zurich University of Applied Sciences
Winterthur

Zusammenfassung LA2 Studienwochen 1-5

Written by: Severin Sprenger
October 13, 2025
Zf. LA2 SW 1-5

1 Vektorräume

In einem Vektorraum müssen Addition und Skalarmultiplikation definiert sein. Die Ergebnisse dieser Operation müssen ebenfalls in diesem Vektorraum sein. (Definition siehe LA2-¿V1-¿F8)

2 Unterräume

Ein Unterraum ist eine Teilmenge eines Vektorraums, der in sich die definition eines Vektorraumes erfüllt.

$$U \subset V$$
$$u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$$
$$\lambda \in \mathbb{K}, u \in U \Rightarrow \lambda \cdot u \in U$$

2.1 Tipp

Das eine Teilmenge ein Unterraum sein kann muss der Null Vektor teil der Teilmenge sein. Als dies immer zuerst prüfen.

3 Lineare Unabhängigkeit

V ist ein Vektorraum und $v_n \in V, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ist gegeben. Die Vektoren v_n sind linear Unabhängig falls folgendes bewiesen werden kann.

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots \lambda_n = 0$$

4 Lineare Hülle

V ist ein Vektorraum und $v_n \in V$ ist gegeben. Der span ist die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) = \{v \in V | v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n\}$$

5 Erzeugersystem

V ist ein Vektorraum. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind ein Erzeugersystem, falls die Vektoren den gesamten Vektorraum V aufspannen.

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) = V$$

6 Basis

V ist ein Vektorraum und $\mathcal{B} \subset V$. $\mathcal{B}$ ist die Basis des Vektorraumes V falls:

- $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist.
- $\mathcal{B}$ ein Erzeugersystem von V ist. ($\operatorname{span}(\mathcal{B}) = V$)

7 Normen

7.1 Euklidische Norm

$$\parallel x \parallel_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, x \in \mathbb{R}^n$$

$$\parallel z \parallel_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}, x \in \mathbb{C}^n$$

7.2 p-Norm

$$\parallel x \parallel_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

7.3 Maximalnorm

$$\parallel x \parallel_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|, x_i \in \mathbb{K}^n$$

7.4 Frobenius-Norm

$$\parallel A \parallel_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

7.5 Zeilensummennorm

$$\parallel A \parallel_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

7.6 Spaltensummennorm

$$\parallel A \parallel_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

8 Skalarprodukte

8.1 Standardskalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle w, z \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{w_i} \cdot z_i, x, y \in \mathbb{C}^n$$

8.2 Skalarprodukt auf L_2

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)\, dx$$