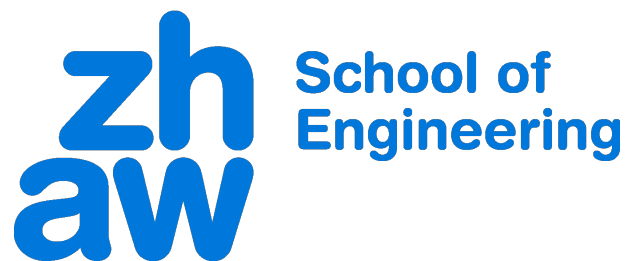


ZHAW Zurich University of Applied Sciences
Winterthur



Zusammenfassung LA2

Studienwochen 1-7

Written by: Severin Sprenger
13. Oktober 2025
Zf. LA2 SW 1-7

1 Vektorräume

In einem Vektorraum müssen Addition und Skalarmultiplikation definiert sein. Die Ergebnisse dieser Operation müssen ebenfalls in diesem Vektorraum sein. (Definition siehe LA2->V1->F8)

2 Unterräume

Ein Unterraum ist eine Teilmenge eines Vektorraums, der in sich die definition eines Vektorraumes erfüllt.

$$\begin{aligned}U &\subset V \\ u, v \in U &\Rightarrow u + v \in U \\ \lambda \in \mathbb{K}, u \in U &\Rightarrow \lambda \cdot u \in U\end{aligned}$$

2.1 Tipp

Das eine Teilmenge ein Unterraum sein kann muss der Null Vektor teil der Teilmenge sein. Als dies immer zuerst prüfen.

3 Lineare Unabhängigkeit

V ist ein Vektorraum und $v_n \in V, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ist gegeben. Die Vektoren v_n sind linear Unabhängig falls folgendes bewiesen werden kann.

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots \lambda_n = 0$$

4 Lineare Hülle

V ist ein Vektorraum und $v_n \in V$ ist gegeben. Der span ist die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $v_1, \dots, v_n$

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \{v \in V | v = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n\}$$

5 Erzeugersystem

V ist ein Vektorraum. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind ein Erzeugersystem, falls die Vektoren den gesamten Vektorraum V aufspannen.

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) = V$$

6 Basis

V ist ein Vektorraum und $\mathcal{B} \subset V$. $\mathcal{B}$ ist die Basis des Vektorraumes V falls:

- $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist.
- $\mathcal{B}$ ein Erzeugersystem von V ist. ($\text{span}(\mathcal{B}) = V$)

7 Normen

7.1 Euklidische Norm

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, x \in \mathbb{R}^n$$

$$\|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}, z \in \mathbb{C}^n$$

7.2 p-Norm

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

7.3 Maximalnorm

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, x_i \in \mathbb{K}^n$$

7.4 Frobenius-Norm

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

7.5 Zeilensummennorm

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

7.6 Spaltensummennorm

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

8 Skalarprodukte

8.1 Standardskalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i, x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle w, z \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{w_i} \cdot z_i, w, z \in \mathbb{C}^n$$

8.2 Skalarprodukt auf L_2

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

9 Fourier-Reihen

$f(t)$ sein eine periodische Funktion mit Periode T . Mithilfe der Fourier transformation kann eine solche Funktion durch die unten stehende Reihe $f(t)$ dargestellt werden.

9.1 Reelle Fourier-Reihen

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t))$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \langle g_n(t), f(t) \rangle_{L^2} = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \langle h_n(t), f(t) \rangle_{L^2} = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt, \quad n \in \mathbb{N}$$

9.2 Komplexe Fourier-Reihen

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t}$$

$$c_k = \langle e_k(t), f(t) \rangle_{L^2} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

9.3 Umrechnen reell & komplex

$$\cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) = \frac{e^{i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}}{2}$$

$$\sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) = \frac{e^{i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} - e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}}{2 \cdot i}$$

$$a_n = 2 \cdot \operatorname{Re}(c_n)$$

$$b_n = -2 \cdot \operatorname{Im}(c_n)$$

$$c_n = \frac{1}{2} \cdot a_n - \frac{1}{2} \cdot b_n \cdot i$$

$$c_0 = \frac{1}{2} \cdot a_0$$

$$c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{1}{2} \cdot a_n + \frac{1}{2} \cdot b_n \cdot i$$

9.4 Amplituden-Phasen-Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t + \varphi_n)$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot \cos(\varphi_n) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) - A_n \cdot \sin(\varphi_n) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t))$$

9.5 Umrechnen reell, komplex und Amplituden-Phasen-Form

$$\begin{aligned}
 a_n &= A_n \cdot \cos(\varphi_n) \\
 b_n &= -A_n \cdot \sin(\varphi_n) \\
 A_n &= 2 \cdot |c_n| \\
 \varphi_n &= \arg(c_n) \\
 c_n &= \frac{1}{2} \cdot A_n \cdot \text{cis}(\varphi_n)
 \end{aligned}$$

10 Lineare Abbildung

$$\begin{aligned}
 f: V &\longrightarrow W, \\
 v &\longmapsto w = f(v)
 \end{aligned}$$

Wenn Gleichung 1, 2 und 3 erfüllt sind ist f eine lineare Abbildung.

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad (1)$$

$$f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v) \quad (2)$$

$$f(0) = 0 \quad (3)$$

10.1 Aufstellen der Matrix

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f \text{ linear}} & W \\
 \downarrow B_V & & \downarrow B_W \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A \in \mathbb{R}^{m \times n}} & \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

10.2 Verkettung

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{f \text{ linear}} & V & \xrightarrow{g \text{ linear}} & W \\
 \downarrow B_U & & \downarrow B_V & & \downarrow B_W \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A \in \mathbb{R}^{I \times n}} & \mathbb{R}^I & \xrightarrow{B \in \mathbb{R}^{m \times I}} & \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

$$C = B \cdot A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

11 Drehmatrizen

Drehmatrizen müssen aus ortsnormierten Spalten aufgebaut sein.

Reine Drehmatrix: $\det(D) = +1$

Drehmatrix und Spiegelung: $\det(D) = -1$