ZHAW Zurich University of Applied Sciences

Winterthur

Zusammenfassung LA2
Studienwochen 1-8

Written by: Severin Sprenger & Yannick Lienhard

13. Oktober 2025

Zf. LA2 SW 1-8

Inhaltsverzeichnis

1 Vektorräume 2
1.1 Checks . . . 2
1.1.1 Assoziativität . . . 2
1.1.2 Existenz des Nullvektors . . . 2
1.1.3 Exitenz des Negativen . . . 2
1.1.4 Kommutativität . . . 2
1.1.5 Assoziativität . . . 2
1.1.6 Neutralität der Eins . . . 2
1.1.7 Distributivgesetz 1 . . . 2
1.1.8 Distributivgesetz 2 . . . 2

2 Unterräume 2
2.1 Tipp . . . 2

3 Lineare Unabhängigkeit 3

4 Lineare Hülle 3

5 Koordinatenvektor 3

6 Erzeugersystem 3

7 Basis 3

8 Normen 3
8.1 Euklidische Norm . . . 3
8.2 p-Norm . . . 3
8.3 Maximalnorm . . . 4
8.4 Frobenius-Norm . . . 4
8.5 Zeilensummennorm . . . 4
8.6 Spaltensummennorm . . . 4

9 Skalarprodukte 4
9.1 Standardskalarprodukt . . . 4
9.2 Skalarprodukt auf L_2 . . . 4

10 Fourier-Reihen 4
10.1 Reelle Fourier-Reihen . . . 4
10.2 Komplexe Fourier-Reihen . . . 5
10.3 Umrechnen reell & komplex . . . 5
10.4 Amplituden-Phasen-Form . . . 5
10.5 Umrechnen reell, komplex und Amplituden-Phasen-Form . . . 5

11 Lineare Abbildung 5
11.1 Aufstellen der Matrix . . . 6
11.2 Verkettung . . . 6

12 Drehmatrizen 6
12.1 Wichtige Matrizen . . . 6

13 Symbole 6

1 Vektorräume

In einem Vektorraum müssen Addition und Skalarmultiplikation definiert sein. Die Ergebnisse dieser Operation müssen ebenfalls in diesem Vektorraum sein. (Definition siehe LA2->V1->F8)

1.1 Checks

1.1.1 Assoziativität

$$(u+v)+w=u+(v+w)\,,\qquad u,v,w\in V$$

1.1.2 Existenz des Nullvektors

$$\exists 0\in V:\qquad V+0=V$$

1.1.3 Exitenz des Negativen

$$\forall v\in V\exists -v\in V:\qquad v+(-v)=0$$

1.1.4 Kommutativität

$$v+w=w+v,\qquad \forall v,w\in V$$

1.1.5 Assoziativität

$$(\lambda\cdot\mu)\cdot v=\mu\cdot(\lambda\cdot v)\,,\qquad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\qquad v\in V$$

1.1.6 Neutralität der Eins

$$1\cdot v=v,\qquad \forall v\in V$$

1.1.7 Distributivgesetz 1

$$\lambda\,(v+w)=\lambda\cdot v+\lambda\cdot w,\qquad \forall\lambda\in\mathbb{K},\qquad v,w\in V$$

1.1.8 Distributivgesetz 2

$$(\lambda+\mu)\cdot v=\lambda\cdot v+\mu\cdot v,\qquad \forall v\in V,\qquad \lambda,\mu\in\mathbb{K}$$

2 Unterräume

Ein Unterraum ist eine Teilmenge eines Vektorraums, der in sich die definition eines Vektorraumes erfüllt.

$$\begin{gathered}U\subset V\\ u,v\in U\Rightarrow u+v\in U\\ \lambda\in\mathbb{K},u\in U\Rightarrow\lambda\cdot u\in U\end{gathered}$$

2.1 Tipp

Das eine Teilmenge ein Unterraum sein kann muss der Null Vektor teil der Teilmenge sein. Als dies immer zuerst prüfen.

3 Lineare Unabhängigkeit

V ist ein Vektorraum und $v_n \in V, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ist gegeben. Die Vektoren v_n sind linear Unabhängig falls folgendes bewiesen werden kann.

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots \lambda_n = 0$$

4 Lineare Hülle

V ist ein Vektorraum und $v_n \in V$ ist gegeben. Der span ist die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) = \{v \in V | v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n\}$$

5 Koordinatenvektor

$$\underbrace{p(x) = 1 \cdot 1 + -3 \cdot x + 8 \cdot x^2 + -7 \cdot x^3}_{\text{Lineare Kombination der Basisvektoren}} \to \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}$$

6 Erzeugersystem

V ist ein Vektorraum. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind ein Erzeugersystem, falls die Vektoren den gesamten Vektorraum V aufspannen.

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) = V$$

7 Basis

V ist ein Vektorraum und $\mathcal{B} \subset V$. $\mathcal{B}$ ist die Basis des Vektorraumes V falls:

- $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist.
- $\mathcal{B}$ ein Erzeugersystem von V ist. ($\operatorname{span}(\mathcal{B}) = V$)

8 Normen

8.1 Euklidische Norm

$$\| x \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\| z \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}, \qquad x \in \mathbb{C}^n$$

8.2 p-Norm

$$\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

8.3 Maximalnorm

$$\| x \|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|, \qquad x_i \in \mathbb{K}^n$$

8.4 Frobenius-Norm

$$\| A \|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

8.5 Zeilensummennorm

$$\| A \|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

8.6 Spaltensummennorm

$$\| A \|_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

9 Skalarprodukte

9.1 Standardskalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle w, z \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{w_i} \cdot z_i, \qquad x, y \in \mathbb{C}^n$$

9.2 Skalarprodukt auf L_2

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)\, dx$$

10 Fourier-Reihen

$f(t)$ sein eine periodische Funktion mit Periode T. Mithilfe der Fourier transformation kann eine solche Funktion durch die unten stehende Reihe $f(t)$ dargestellt werden.

ω_0 ist die Basiswinkelgeschwindigkeit und kann durch den GGT aller vorhanden Frequenzen definiert werden.

10.1 Reelle Fourier-Reihen

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) \right)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t)\, dt$$

$$a_n = \langle g_n(t), f(t) \rangle_{L^2} = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t)\, dt, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \langle h_n(t), f(t) \rangle_{L^2} = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)\, dt, \qquad n \in \mathbb{N}$$

10.2 Komplexe Fourier-Reihen

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \cdot e^{i\cdot k\cdot\omega_0\cdot t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i\cdot k\cdot\omega_0\cdot t}$$
$$c_k = \langle e_k(t), f(t)\rangle_{L^2} = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T f(t)\cdot e^{-i\cdot k\cdot\omega_0\cdot t}\,dt, \qquad n\in\mathbb{Z}$$

10.3 Umrechnen reell & komplex

$$\cos(n\cdot\omega_0\cdot t) = \frac{e^{i\cdot n\cdot\omega_0\cdot t} + e^{-i\cdot n\cdot\omega_0\cdot t}}{2}$$
$$\sin(n\cdot\omega_0\cdot t) = \frac{e^{i\cdot n\cdot\omega_0\cdot t} - e^{-i\cdot n\cdot\omega_0\cdot t}}{2\cdot i}$$
$$a_n = 2\cdot\mathrm{Re}(c_n)$$
$$b_n = -2\cdot\mathrm{Im}(c_n)$$
$$c_n = \frac{1}{2}\cdot a_n - \frac{1}{2}\cdot b_n\cdot i$$
$$c_0 = \frac{1}{2}\cdot a_0$$
$$c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{1}{2}\cdot a_n + \frac{1}{2}\cdot b_n\cdot i$$

10.4 Amplituden-Phasen-Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t + \varphi_n)$$
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n\cdot\cos(\varphi_n)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t) - A_n\cdot\sin(\varphi_n)\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\right)$$

10.5 Umrechnen reell, komplex und Amplituden-Phasen-Form

$$a_n = A_n\cdot\cos(\varphi_n)$$
$$b_n = -A_n\cdot\sin(\varphi_n)$$
$$A_n = 2\cdot|c_n|$$
$$\varphi_n = \arg(c_n)$$
$$c_n = \frac{1}{2}\cdot A_n\cdot\mathrm{cis}(\varphi_n)$$

11 Lineare Abbildung

$$f: V \longrightarrow W,$$
$$v \longmapsto w = f(v)$$

Wenn Gleichung 1, 2 und 3 erfüllt sind ist f eine lineare Abbildung.

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \tag{1}$$
$$f(\lambda\cdot v) = \lambda\cdot f(v) \tag{2}$$
$$f(0) = 0 \tag{3}$$

11.1 Aufstellen der Matrix

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f \text{ linear}"] \arrow[d, "B_V"] & W \arrow[d, "B_W"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A\in\mathbb{R}^{m\times n}"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

11.2 Verkettung

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f \text{ linear}"] \arrow[d, "B_U"] & V \arrow[r, "g \text{ linear}"] \arrow[d, "B_V"] & W \arrow[d, "B_W"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A\in\mathbb{R}^{I\times n}"] & \mathbb{R}^I \arrow[r, "B\in\mathbb{R}^{m\times I}"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$$C = B \cdot A \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

12 Drehmatrizen

Drehmatrizen müssen aus ortsnormieren Spalten aufgebaut sein.

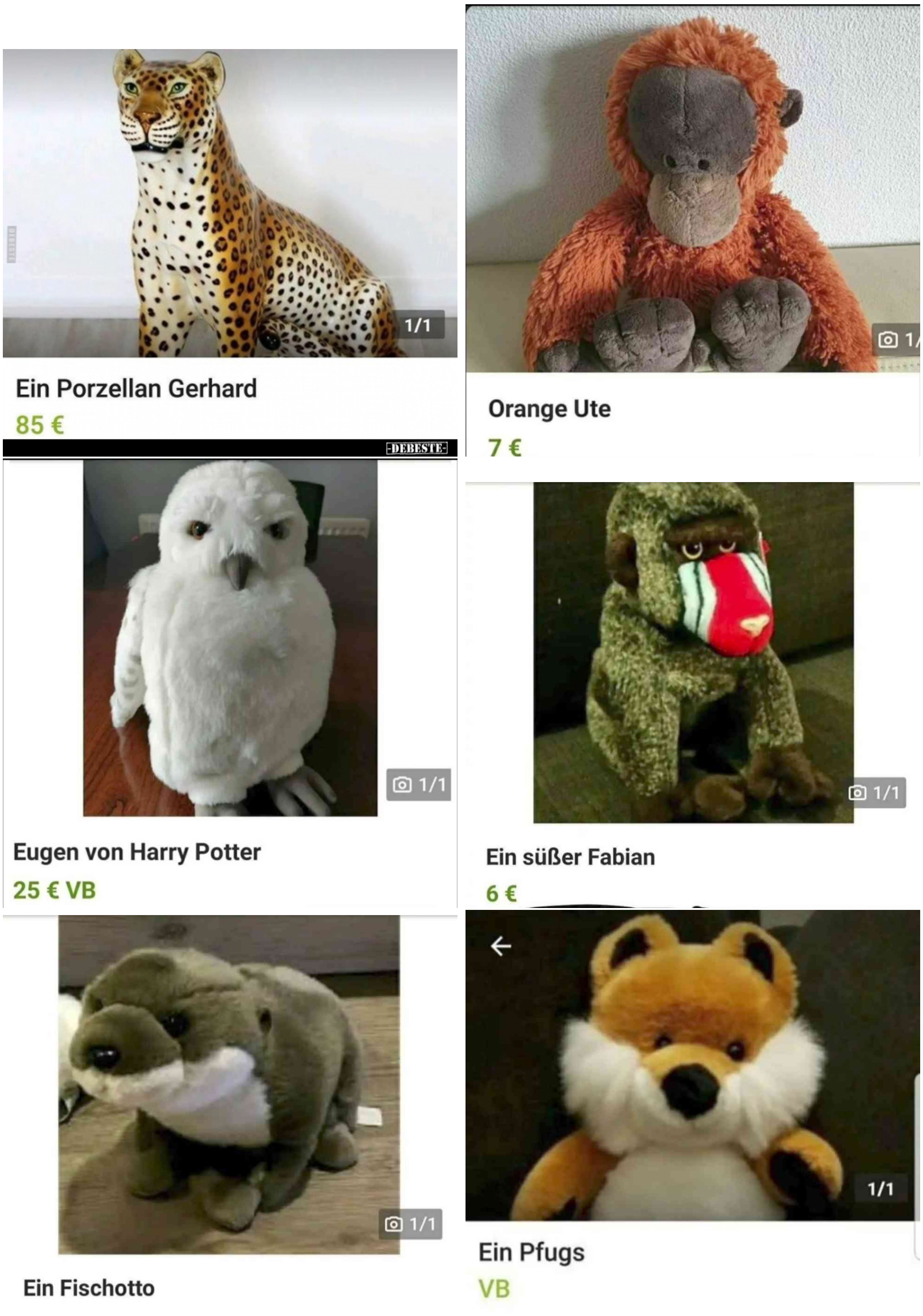
$$\begin{aligned} \text{Reine Drehmatrix: } & \det(D) = +1 \\ \text{Drehmatrix und Spiegelung: } & \det(D) = -1 \end{aligned}$$

12.1 Wichtige Matrizen

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Stecken der Matrix mit Faktor 2} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Spiegelung an der X Achse} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Projektion auf die X Achse} \\ A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Drehung um } -\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ im Uhrzeigersinn} \\ A_5 &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \rightarrow \text{Drehung um } \varphi \text{ im Gegenuhrzeigersinn} \end{aligned}$$

13 Symbole

- $\iff$: If and only if
- $\implies$: Implies
- $\forall$: For all
- $\exists$: Exists


1/1
Ein Porzellan Gerhard
85 €
1/
Orange Ute
7 €
DEBESTE
1/1
Eugen von Harry Potter
25 € VB
1/1
Ein süßer Fabian
6 €
1/1
Ein Fischotto
1/1
Ein Pfugs
VB