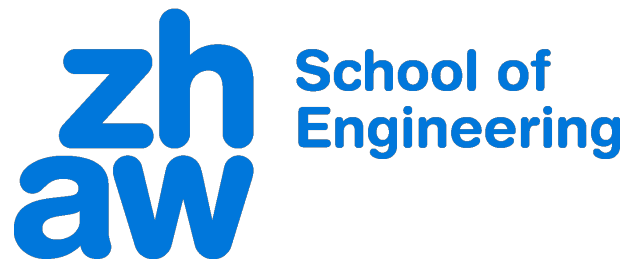


ZHAW Zurich University of Applied Sciences
Winterthur



Zusammenfassung LA1

Studienwochen 1-14

Written by: Severin Sprenger
October 13, 2025
Zf. LA1 SW 1-14

Contents

1	Komplexe Zahlen	2
1.1	Definition $\mathbb{C}$	2
1.2	Real- und Imaginärteil	2
1.3	Komplexe Konjugation	2
1.3.1	Rechenregeln / -gesetze	2
1.4	Betrag (Absolutbetrag)	2
1.4.1	Rechenregeln / -gesetze	2
1.5	Polar / Kartesisch	3
1.6	Rechenregeln in $\mathbb{C}$	3
2	Vektoren	4
2.1	Definition Standardvektorraum	4
2.2	Rechenregeln	4
2.3	Standartnorm	4
2.3.1	Rechenregeln	5
2.3.2	Vektor normieren	5
2.4	Standardskalarprodukt (Indizierte Norm)	5
2.4.1	Rechenregeln	5
2.5	Öffnungswinkel	6
2.6	Orthogonalprojektion	6
2.7	Vektorprodukt	6
2.7.1	Rechenregeln	6
2.7.2	Dreiecksfläche	7
2.7.3	Spatprodukt	7
2.7.4	Tetraeder Volumen	7
3	$m \times n$-Matrizen	7
3.1	Nullmatrix	7
3.2	Einheitsmatrix	7
3.3	Rechenregeln	8
3.4	Matrix Multiplikation	8
3.5	Assoziativität	9
3.6	Hauptdiagonale	9
4	LGS	9
4.1	Gauss-Algorithmus	9
4.2	LGS lösen	10
4.3	Keine Lösung	10
4.4	Unendlich viele Lösungen / Parameter	10
4.5	Lösungsmenge	10
4.6	Eine Lösung	10
4.7	Unendlich viele Lösungen	10
4.8	Kern / homogenes LGS	11
4.9	Dimension	11
4.10	Rang	11
5	LU-Zerlegung	11
5.1	Zeilenvertauschungen	11
5.2	Anwendung LGS	11
6	Transponierte Matrix	11
6.1	Rechenregeln	11
6.2	Symmetrische Matrizen	12
7	Adjungierte Matrix	12
7.1	Rechenregeln	12
7.2	Hermiteische Matrizen	12

8 Spur	12
8.1 Normalengleichung (Normalengleichung)	12
9 Determinante	13
9.1 2×2 -Matrix	13
9.1.1 Rechenregeln	13
9.2 3×3 -Matrix	13
9.2.1 Rechenregeln	13
9.2.2 Regeln von Sarrus	14
9.3 $n \times n$ -Matrix	14
9.3.1 Rechenregeln	14
9.3.2 Laplacescher Entwicklungssatz	14
10 Matrixinverse	15
10.1 Rechenregeln	15
11 Komplexe Zahlen und Funktionen	15
11.1 Exponentialform	15
11.2 Multiplikation/Division	15
11.3 Potenzen	16
11.4 Wurzeln	16
11.5 Logarithmus	16
12 Seiten im Formelbuch	16
13 Symbole	16

1 Komplexe Zahlen

$$i^2 = -1$$

1.1 Definition $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} := \{z \mid z = x + yi, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

1.2 Real- und Imaginärteil

$$\operatorname{Re}(z) := x$$

$$\operatorname{Im}(z) := y$$

1.3 Komplexe Konjugation

Bei der komplexen Konjugation wird der imaginäre Teil der Zahl mit -1 multipliziert (aka. Vorzeichen gewechselt).

$$\bar{z} := x - yi$$

1.3.1 Rechenregeln / -gesetze

$$z \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C}$$

- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- $z = \bar{z} \implies z \in \mathbb{R}$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$

1.4 Betrag (Absolutbetrag)

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

1.4.1 Rechenregeln / -gesetze

$$z \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C}$$

- $|z| = 0 \implies z = 0$
- $|wz| = |w||z|$
- $|w + z| \leq |w| + |z|$
- $|wz|^2 = |w|^2 |z|^2$
- $|z|^2 \neq z^2$

1.5 Polar / Kartesisch

$$z = x + yi$$

$$\arg(z) = \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0 \wedge y < 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \wedge y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \wedge y \geq 0 \\ \text{nicht definiert,} & x = y = 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), & y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), & y < 0 \\ \text{nicht definiert,} & x = y = 0 \end{cases}$$

$$r = |z|$$

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r(\operatorname{cis}(\varphi))$$

1.6 Rechenregeln in $\mathbb{C}$

$$z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}, z_3 \in \mathbb{C}$$

- $z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
- $z_1 + 0 = z_1$
- $z_1 + (-z_1) = 0$
- $z_1 z_2 := (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$
- $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
- $1 \cdot z_1 = z_1$
- $z_1 \neq 0 \iff z_1^{-1} = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} - \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} i$
- $z_1 z_2 = z_2 z_1$
- $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

2 Vektoren

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2.1 Definition Standardvektorraum

$$\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n \text{ oder } \mathbb{K}^n = \mathbb{C}^n$$

$$\mathbb{K}^n := \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_k \in \mathbb{K}, 1 \leq k \leq n \right\}$$

2.2 Rechenregeln

$$x \in \mathbb{K}^n, y \in \mathbb{K}^n, z \in \mathbb{K}^n, \lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K}$$

- $\lambda \cdot x = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$
- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- $x + 0 = x$
- $x + (-x) = 0$
- $x + y = y + x$
- $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
- $1 \cdot x = x$
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- $x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$
- $xy = \begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ \vdots \\ x_n y_n \end{bmatrix}$

2.3 Standardnorm

$$x \in \mathbb{K}^n$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

$$\|x\| \in \mathbb{R}_0^+$$

Achtung bei $x \in \mathbb{C}^n$ muss für x_i der Betrag eingesetzt werden (subsection 1.4).

2.3.1 Rechenregeln

$$x \in \mathbb{K}^n, y \in \mathbb{K}^n, \lambda \in \mathbb{K}$$

- $\|x\| = 0 \implies x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

2.3.2 Vektor normieren

Ein normierter Vektor ist ein Vektor mit der "Länge" 1 ($\|e_x\| = 1$).

$$x \in \mathbb{K}^n, \|x\| \neq 0$$

$$e_x = \frac{x}{\|x\|}$$

2.4 Standardskalarprodukt (Indizierte Norm)

$$x \in \mathbb{K}^n, y \in \mathbb{K}^n$$

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

2.4.1 Rechenregeln

$$x \in \mathbb{K}^n, y \in \mathbb{K}^n, z \in \mathbb{K}^n, \lambda \in \mathbb{K}$$

Wenn $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n$:

- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- $\langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$
- $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Wenn $\mathbb{K}^n = \mathbb{C}^n$:

- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- $\langle \lambda x, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$
- $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$
- $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

2.5 Öffnungswinkel

$$x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0, y \in \mathbb{K}^n, y \neq 0$$

$$\varphi = \angle(x, y) := \arccos \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \right)$$

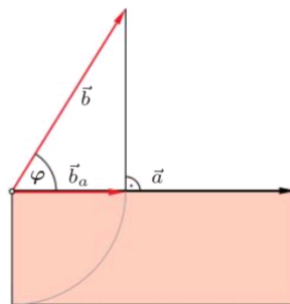
$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

2.6 Orthogonalprojektion

Die Orthogonalprojektion ist die Projektion eines Vektors auf einen anderen Vektor.

$$x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0, y \in \mathbb{K}^n, y \neq 0$$

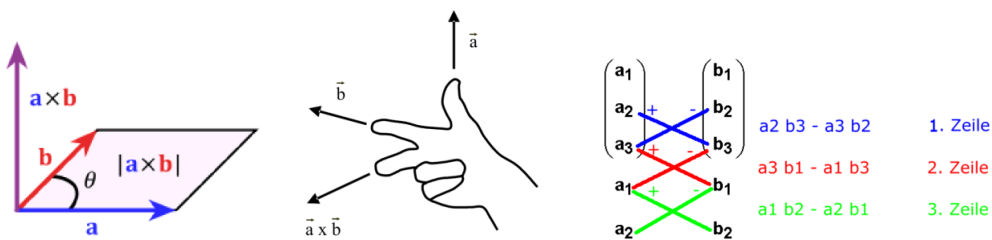
$$y_x = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} x$$



2.7 Vektorprodukt

$$a \in \mathbb{R}^3, a \neq 0, b \in \mathbb{R}^3, b \neq 0, c \in \mathbb{R}^3, c \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$w = a \times b = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$



2.7.1 Rechenregeln

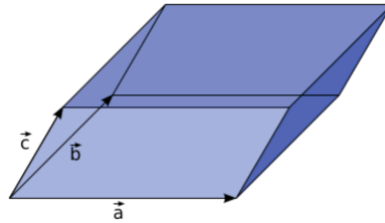
- $w \perp a \wedge w \perp b$
- $\|w\| = \|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin(\theta)$
- $a \times b = 0 \implies a = \lambda b$
- $a \times b = -b \times a$
- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$
- $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$

2.7.2 Dreiecksfläche

$$a = \overrightarrow{AB}, b = \overrightarrow{AC}$$

$$A = \frac{1}{2} \|a \times b\|$$

2.7.3 Spatprodukt



$$a = \overrightarrow{AB}, b = \overrightarrow{AC}, c = \overrightarrow{AD}$$

$$V = |\langle a \times b, c \rangle| = |\langle c \times a, b \rangle| = |\langle b \times c, a \rangle|$$

2.7.4 Tetraeder Volumen

$$V = \frac{1}{6} |\langle a \times b, c \rangle|$$

3 $m \times n$ -Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{K}^{m \times n} := \{A | A = (a_{ij}), i \in [1; m], j \in [1; n], a_{ij} \in \mathbb{K}\}$$

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

3.1 Nullmatrix

$$0 := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

3.2 Einheitsmatrix

$$\mathbb{1}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

3.3 Rechenregeln

$$A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{m \times n}, C \in \mathbb{K}^{m \times n}, \lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K}$$

$$\bullet A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\bullet (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$\bullet A + 0 = A$$

$$\bullet A + (-A) = 0$$

$$\bullet A + B = B + A$$

$$\bullet (\lambda\mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu A)$$

$$\bullet 1 \cdot A = A$$

$$\bullet \lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$$

$$\bullet (\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$$

•

3.4 Matrix Multiplikation

$$A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{h \times k}$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Das Matrixprodukt ist nicht für alle Matrizen definiert. Dies kann folgend definiert werden.

$$\bullet n = h \iff A \cdot B \text{ is defined}$$

$$\bullet k = m \iff B \cdot A \text{ is defined}$$

Falls die Multiplikation definiert ist, kann das Produkt wie folgend definiert werden:

$$A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{h \times k}$$

$$\bullet \text{ Falls } A \cdot B: C \in \mathbb{K}^{m \times k}, l = n = h$$

$$\bullet \text{ Falls } B \cdot A: C \in \mathbb{K}^{h \times n}, l = m = k$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$\begin{aligned}
 C = B \cdot A &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (-5) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 & (-5) \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 & \dots & \dots \\ 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 & \dots & \dots \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 & \dots & \dots \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -5 & -10 & -15 & 10 \\ 15 & 0 & 15 & 18 \\ -3 & -2 & 7 & -8 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3.5 Assoziativität

Das Matrixprodukt ist assoziativ, solange die entsprechenden Matrix Multiplikationen definiert sind.

$$A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{h \times k}, C \in \mathbb{K}^{g \times p}$$

$$C(BA) = (CB)A$$

3.6 Hauptdiagonale

Die Hauptdiagonale einer Matrix verläuft von oben links $i = 1; j = 1$ nach unten rechts $i = m; j = n$. Ein Element der Matrix ist Teil der Hauptdiagonale falls $i = j$. Die Hauptdiagonale ist in der unteren Abbildung in rot eingezeichnet.

4 LGS

$$\begin{array}{rcl} a_{11} \cdot x_1 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n & = & b_n \end{array}$$

Das obere Gleichungssysteme kann folgend in Matrix-Vektor-Form umgeschrieben werden.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

4.1 Gauss-Algorithmus

Das Ziel des Gauss-Algorithmus ist es Nullen unterhalb der Hauptdiagonale einer Matrix mit einem Koeffizienten-Vektor b zu erzeugen.

Der Gauss-Algorithmus erlaubt das Vertauschen von Zeilen und das Multiplikation / Division / Addition / Subtraktion von Zeilen von einander. P wird hier als Pivotelement verwendet. Das Pivotelement ist ein Element aus einer Zeile der Matrix. Links des Pivotelement ist der Gauss-Algorithmus bereits erfüllt und die Elemente unter dem Pivotelement sind die zu modifizierenden Elemente der Matrix. Eine Zeile, die von einem Pivotelement besetzt ist/war, wird nicht mehr verändert. Wenn alle Elemente in der Spalte des Pivotelements unterhalb des Pivotelements gleich Null sind, so wird das Pivotelement der Hauptdiagonale nach unten/rechts bewegt. Dies wird wiederholt, bis das Pivotelement das rechte Ende der Matrix erreicht hat. Falls ein Pivotelement gleich 0 ist, muss die Zeile so vertauscht werden, dass das neue Pivotelement nicht gleich Null ist.

$$P = \begin{pmatrix} i_P \\ j_P \end{pmatrix}$$

Beispiel einer Matrix / Vektor Kombination auf die der Gauss-Algorithmus angewendet wurde.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

4.2 LGS lösen

Um das LGS mit dem Matrix/Vektor Kombination zu lösen wird rückwärts eingesetzt. Es ist die Matrix / Vektor Kombination gegeben:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Solve for x_3 : $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3$

Solve for x_2 : $0 \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2$

Solve for x_1 : $a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1$

4.3 Keine Lösung

Falls eine Zeile der Matrix nur aus Nullen besteht und der b -Vektor nicht gleich Null ist gibt es keine Lösung für das LGS.

$$b_3 \neq 0, * = \text{any number}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ * \\ b_3 \end{bmatrix}$$

4.4 Unendlich viele Lösungen / Parameter

Falls eine Variable Teil des x -Vektors in keine Zeile der Matrix A keine Pivotelement ein einer Spalte besitzt, somit muss diese Variable als Parameter ausgedrückt werden. Bsp.:

$$* = \text{any number}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

Somit muss die Variable x_4 als Parameter ausgedrückt werden.

$$x_4 = t \in \mathbb{K}$$

4.5 Lösungsmenge

4.6 Eine Lösung

Wenn das LGS eine Lösung besitzt, kann die Lösung als Vektor geschrien werden. Wobei x_{nL} die Lösungen der Variablen des LGS sind.

$$x = \begin{bmatrix} x_{1L} \\ \vdots \\ x_{nL} \end{bmatrix}$$

4.7 Unendlich viele Lösungen

Wenn das LGS unendlich viele Lösungen besitzt, so kann die Lösung wie folgt geschrieben werden.

$$* = \text{any number, you know what the fuck you are doing}$$

$$x = \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} \cdots, t \in \mathbb{K}, \cdots$$

- 1 Parameter $\implies$ Linie im Raum
- 2 Parameter $\implies$ Fläche im Raum
- 3 Parameter $\implies$ Volumen im Raum

4.8 Kern / homogenes LGS

$$Ax = 0$$

$\ker(A)$ ist die Bezeichnung für die Lösungsmenge eines homogenen LGS.

4.9 Dimension

$\dim(A)$ ist die Bezeichnung für die Anzahl freien Variablen (Parameter) der Lösung eines homogenen LGS.

4.10 Rang

$\text{rang}(A)$ ist die Bezeichnung für die Anzahl der fixen Variablen der Lösung eines homogenen LGS.

5 LU-Zerlegung

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix} = L \cdot U$$

Falls alle Elemente auf der Diagonalen gleich 1 sind, handelt es sich um eine unipotente Dreiecksmatrix. Für LU-Zerlegung normal Gauß und Schritte mit $\cdot - 1$ in die L -Matrix eintragen.

5.1 Zeilenvertauschungen

Falls Zeilen während der LU-Zerlegung durchgeführt werden müssen, muss zusätzlich eine Permutationsmatrix angefügt werden.

5.2 Anwendung LGS

$$Ax = b$$

$$P \cdot A = L \cdot U$$

$$\text{Vorwärtseinsetzen: } L \cdot y = P \cdot b \implies y$$

$$\text{Rückwärtseinsetzen: } U \cdot x = y \implies x$$

6 Transponierte Matrix

Eine transponierte Matrix ist die Matrix an der Diagonalen gespiegelt.

$$a_{ij}^T = a_{ji}$$

6.1 Rechenregeln

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

6.2 Symmetrische Matrizen

- Symmetrisch, falls $A^T = A$
- Anti Symmetrisch, falls $A^T = -A$

7 Adjungierte Matrix

Eine adjungierte Matrix ist die Matrix in der alle Elemente transponiert worden sind.

$$a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$$

7.1 Rechenregeln

- $(A + B)^* = A^* + B^*$
- $(\lambda \cdot A)^* = \bar{\lambda} \cdot A^*$
- $(A^*)^* = A$
- $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$

7.2 Hermitesche Matrizen

- Hermitesch oder selbstadjungiert, falls $A^* = A$
- Anti-hermitesch oder anti-selbstadjungiert, falls $A^* = -A$

8 Spur

Die Spur einer Matrix ist die Summe aller Elemente auf der Diagonalen.

$$\text{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

8.1 Normalengleichung (Normalengleichung)

Es sind N Punkte gegeben.

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + 1 \cdot c$$

$$x := \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N^2 & x_N & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

$$A^T \cdot A \cdot \bar{x} = A^T \cdot b$$

9 Determinante

9.1 2×2 -Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = [a_1 \quad a_2]$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det(a_1, a_2) := a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

9.1.1 Rechenregeln

- $\det(\mathbb{1}_2) = 1$
- $\det(a_1, a_2) = -\det(a_2, a_1)$
- $\det(\lambda \cdot a_1, a_2) = \lambda \cdot \det(a_1, a_2) = \det(a_1, \lambda \cdot a_2)$
- $\det(a_1 + b_1, a_2) = \det(a_1, a_2) + \det(b_1, a_2)$
- $\det(a_1, a_2 + b_2) = \det(a_1, a_2) + \det(a_1, b_2)$
- $|\det(a_1, a_2)|$ entspricht der Fläche des von a_1 und a_2 aufgespannte Parallelogramm.

9.2 3×3 -Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}$$

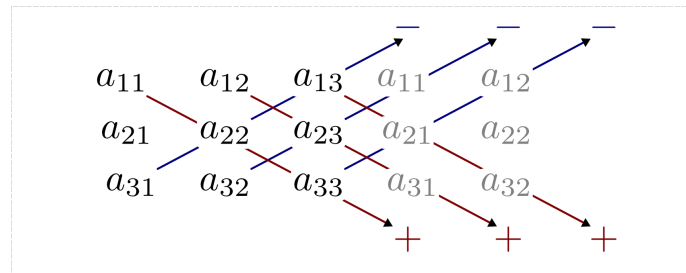
$$a_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det(a_1, a_2, a_3) := (a_1 \times a_2) \cdot a_3$$

9.2.1 Rechenregeln

- $\det(\mathbb{1}_3) = 1$
- $|\det(a_1, a_2, a_3)|$ entspricht der Volumen dem von a_1 , a_2 und a_3 aufgespannte Spats.

9.2.2 Regeln von Sarrus



$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

9.3 $n \times n$ -Matrix

$$\det(A) = \det(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

9.3.1 Rechenregeln

- $\det(\mathbb{1}_n) = 1$
- $\det(a_1, \dots, a_i + b, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, b, \dots, a_n)$
- $\det(a_1, \dots, \lambda \cdot a_i, \dots, a_n) = \lambda \cdot \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$
- $\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(U) = \text{Produkt der Diagonalelemente}$, wobei U eine obere Dreiecksmatrix ist
- $\det(L) = \text{Produkt der Diagonalelemente}$, wobei U eine untere Dreiecksmatrix ist
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \det(A)^{-1}$

9.3.2 Laplacescher Entwicklungssatz

$$\text{Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte: } \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

$$\text{Entwicklung nach der } i\text{-ten Spalte: } \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

A_{ij} ist eine Untermatrix mit $(n-1) \times (n-1)$ Dimensionen. Die Zeile i und Spalte j streichen sich dabei.

10 Matrixinverse

$$A \text{ invertierbar} \iff \det(A) \neq 0 \iff \text{rang}(A) = n$$

- A : regulär, falls $\text{rang}(A) = n$, sonst singulär
- A : invertierbar, falls B existiert sodass $A \cdot B = \mathbb{1}_n = B \cdot A$, $A^{-1} := B$

Beim Algorithmus wird "von beiden Seiten der Gauss angewendet". Es werden die gleichen Schritte auf die rechte Matrix angewendet wie die Linke.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc|cccc}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & & \vdots \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 & 1
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{cccc|cccc}
 \boxed{1} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\
 0 & \boxed{1} & & \vdots & * & * & \cdots & * \\
 \vdots & & \ddots & * & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & * & \cdots & *
 \end{array}
 \end{array}$$

10.1 Rechenregeln

- $A \cdot B = B \cdot A$
- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}_n$
- A^{-1} ist eindeutig
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

11 Komplexe Zahlen und Funktionen

$$e^{i \cdot \pi} + 1 = 0$$

$$e^{i \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

$$e^z = e^{x+i \cdot y} = e^x \cdot e^{i \cdot y} = e^x \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y))$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

11.1 Exponentialform

$$z = x + y \cdot i = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot e^{i \cdot \varphi + k \cdot 2 \cdot \pi \cdot i}, k \in \mathbb{Z}$$

11.2 Multiplikation/Division

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1 + k \cdot 2 \cdot \pi \cdot i} \cdot r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2 + k \cdot 2 \cdot \pi \cdot i}$$

11.3 Potenzen

$$z^n = (r \cdot e^{i \cdot \varphi + k \cdot 2 \cdot \pi \cdot i})^n$$

11.4 Wurzeln

$$\sqrt[n]{z} = (r \cdot e^{i \cdot \varphi + k \cdot 2 \cdot \pi \cdot i})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n} \cdot i}$$

11.5 Logarithmus

$$\ln_{\mathbb{C}}(z) := \ln_{\mathbb{R}}(|z|) + i \cdot \arg(z)$$

12 Seiten im Formelbuch

- Vektoren: S27, S104, S105, S106
- Matrizen: S24, S28, S34
- Komplexe Zahlen: S18, S19

13 Symbole

- $\iff$: If and only if
- $\implies$: Implies

