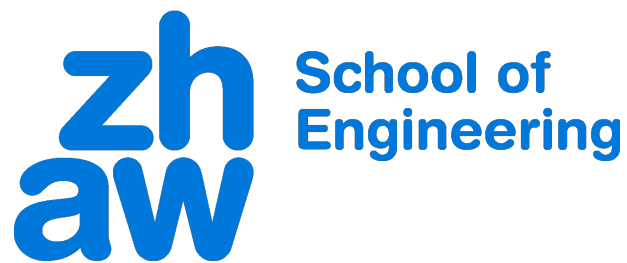


ZHAW Zurich University of Applied Sciences
Winterthur



Zusammenfassung LA1

Studienwochen 1-7

Written by: Severin Sprenger
October 13, 2025
Zf. LA1 SW 1-7

1 Komplexe Zahlen

$$i^2 = -1$$

1.1 Definition $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} := \{z \mid z = x + yi, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

1.2 Real- und Imaginärteil

$$\operatorname{Re}(z) := x$$

$$\operatorname{Im}(z) := y$$

1.3 Komplexe Konjugation

Bei der komplexen Konjugation wird der imaginäre Teil der Zahl mit -1 multipliziert (aka. Vorzeichen gewechselt).

$$\bar{z} := x - yi$$

1.3.1 Rechenregeln / -gesetze

$$z \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C}$$

- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- $z = \bar{z} \implies z \in \mathbb{R}$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$

1.4 Betrag (Absolutbetrag)

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

1.4.1 Rechenregeln / -gesetze

$$z \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C}$$

- $|z| = 0 \implies z = 0$
- $|wz| = |w||z|$
- $|w + z| \leq |w| + |z|$
- $|wz|^2 = |w|^2 |z|^2$
- $|z|^2 \neq z^2$

1.5 Polar / Kartesisch

$$z = x + yi$$

$$\arg(z) = \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

$$r = |z|$$

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r(\operatorname{cis}(\varphi))$$

1.6 Rechenregeln in $\mathbb{C}$

$$z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}, z_3 \in \mathbb{C}$$

- $z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
- $z_1 + 0 = z_1$
- $z_1 + (-z_1) = 0$
- $z_1 z_2 := (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$
- $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
- $1 \cdot z_1 = z_1$
- $z_1 \neq 0 \iff z_1^{-1} = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} - \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} i$
- $z_1 z_2 = z_2 z_1$
- $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

2 Vektoren

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2.1 Definition Standardvektorraum

$$\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n \text{ oder } \mathbb{K}^n = \mathbb{C}^n$$

$$\mathbb{K}^n := \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_k \in \mathbb{K}, 1 \leq k \leq n \right\}$$

2.2 Rechenregeln

$$x \in \mathbb{K}^n, y \in \mathbb{K}^n, z \in \mathbb{K}^n, \lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K}$$

- $\lambda \cdot x = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$
- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- $x + 0 = x$
- $x + (-x) = 0$
- $x + y = y + x$
- $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
- $1 \cdot x = x$
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- $x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$
- $xy = \begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ \vdots \\ x_n y_n \end{bmatrix}$

2.3 Standardnorm

$$x \in \mathbb{K}^n$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

$$\|x\| \in \mathbb{R}_0^+$$

Achtung bei $x \in \mathbb{C}^n$ muss für x_i der Betrag eingesetzt werden (subsection 1.4).

2.3.1 Rechenregeln

$$x \in \mathbb{K}^n, y \in \mathbb{K}^n, \lambda \in \mathbb{K}$$

- $\|x\| = 0 \implies x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

2.3.2 Vektor normieren

Ein normierter Vektor ist ein Vektor mit der "Länge" 1 ($\|e_x\| = 1$).

$$x \in \mathbb{K}^n, \|x\| \neq 0$$

$$e_x = \frac{x}{\|x\|}$$

2.4 Standardskalarprodukt

$$x \in \mathbb{K}^n, y \in \mathbb{K}^n$$

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

2.4.1 Rechenregeln

$$x \in \mathbb{K}^n, y \in \mathbb{K}^n, z \in \mathbb{K}^n, \lambda \in \mathbb{K}$$

Wenn $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n$:

- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- $\langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$
- $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Wenn $\mathbb{K}^n = \mathbb{C}^n$:

- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- $\langle \lambda x, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$
- $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$
- $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

2.5 Öffnungswinkel

$$x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0, y \in \mathbb{K}^n, y \neq 0$$

$$\varphi = \angle(x, y) := \arccos \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \right)$$

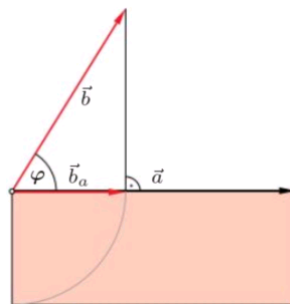
$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

2.6 Orthogonalprojektion

Die Orthogonalprojektion ist die Projektion eines Vektors auf einen anderen Vektor.

$$x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0, y \in \mathbb{K}^n, y \neq 0$$

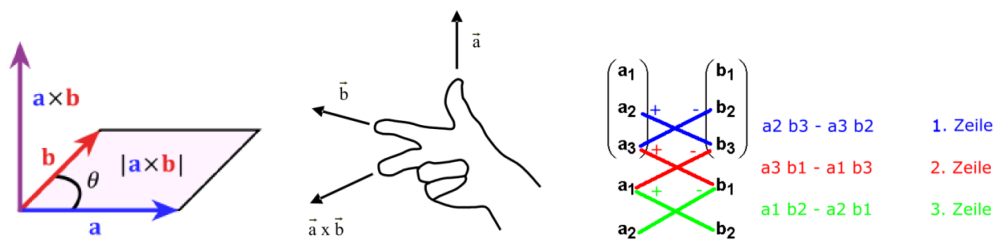
$$y_x = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} x$$



2.7 Vektorprodukt

$$a \in \mathbb{R}^3, a \neq 0, b \in \mathbb{R}^3, b \neq 0, c \in \mathbb{R}^3, c \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$w = a \times b = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$



2.7.1 Rechenregeln

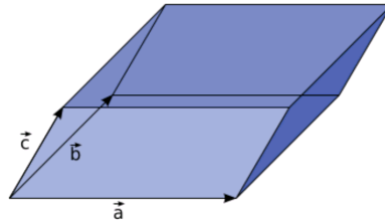
- $w \perp a \wedge w \perp b$
- $\|w\| = \|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin(\theta)$
- $a \times b = 0 \implies a = \lambda b$
- $a \times b = -b \times a$
- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b)$
- $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$

2.7.2 Dreiecksfläche

$$a = \overrightarrow{AB}, b = \overrightarrow{AC}$$

$$A = \frac{1}{2} \|a \times b\|$$

2.7.3 Spatprodukt



$$a = \overrightarrow{AB}, b = \overrightarrow{AC}, c = \overrightarrow{AD}$$

$$V = |\langle a \times b, c \rangle| = |\langle c \times a, b \rangle| = |\langle b \times c, a \rangle|$$

2.7.4 Tetraeder Volumen

$$V = \frac{1}{6} |\langle a \times b, c \rangle|$$

3 $m \times n$ -Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{K}^{m \times n} := \{A | A = (a_{ij}), i \in [1; m], j \in [1; n], a_{ij} \in \mathbb{K}\}$$

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

3.1 Nullmatrix

$$0 := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

3.2 Einheitsmatrix

$$\mathbb{1}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

3.3 Rechenregeln

$$A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{m \times n}, C \in \mathbb{K}^{m \times n}, \lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K}$$

$$\bullet A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\bullet (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$\bullet A + 0 = A$$

$$\bullet A + (-A) = 0$$

$$\bullet A + B = B + A$$

$$\bullet (\lambda\mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu A)$$

$$\bullet 1 \cdot A = A$$

$$\bullet \lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$$

$$\bullet (\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$$

•

3.4 Matrix Multiplikation

$$A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{h \times k}$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Das Matrixprodukt ist nicht für alle Matrizen definiert. Dies kann folgend definiert werden.

$$\bullet n = h \iff A \cdot B \text{ is defined}$$

$$\bullet k = m \iff B \cdot A \text{ is defined}$$

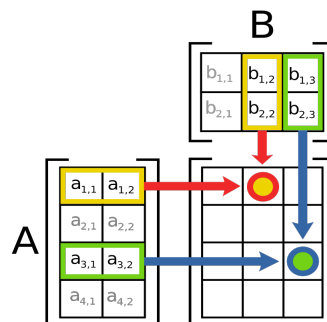
Falls die Multiplikation definiert ist, kann das Produkt wie folgend definiert werden:

$$A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{h \times k}$$

$$\bullet \text{ Falls } A \cdot B: C \in \mathbb{K}^{m \times k}, l = n = h$$

$$\bullet \text{ Falls } B \cdot A: C \in \mathbb{K}^{h \times n}, l = m = k$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} \cdot b_{kj}$$



3.5 Assoziativität

Das Matrixprodukt ist assoziativ, solange die entsprechenden Matrix Multiplikationen definiert sind.

$$A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{h \times k}, C \in \mathbb{K}^{g \times p}$$

$$C(BA) = (CB)A$$

3.6 Hauptdiagonale

Die Hauptdiagonale einer Matrix verläuft von oben links $i = 1; j = 1$ nach unten rechts $i = m; j = n$. Ein Element der Matrix ist Teil der Hauptdiagonale falls $i = j$. Die Hauptdiagonale ist in der unteren Abbildung in rot eingezeichnet.

A 4x4 grid of variables a_{ij} . Red arrows point from a_{11} to a_{22} , a_{33} , and a_{44} . Blue arrows point from a_{12} to a_{23} and a_{34} , from a_{13} to a_{24} and a_{35} , and from a_{14} to a_{25} and a_{36} .

4 LGS

$$\begin{array}{rcl} a_{11} \cdot x_1 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n & = & b_n \end{array}$$

Das obere Gleichungssysteme kann folgend in Matrix-Vektor-Form umgeschrieben werden.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

4.1 Gauss-Algorithmus

Das Ziel des Gauss-Algorithmus ist es Nullen unterhalb der Hauptdiagonale einer Matrix mit einem Koeffizienten-Vektor b zu erzeugen.

Der Gauss-Algorithmus erlaubt das vertauschen von Zeilen und das Multiplikation / Division / Addition / Subtraktion von Zeilen von einander. P wird hier als Pivotelement verwendet. Das Pivotelement ist ein Element aus einer Zeile der Matrix. Links des Pivotelement ist der Gauss-Algorithmus bereits erfüllt und die Elemente unter dem Pivotelement sind die zu modifizierenden Elemente der Matrix. Eine Zeile die von einem Pivotelement besetzt ist/war, wird nicht mehr verändert. Wenn alle Elemente in der Spalte des Pivotelements unterhalb des Pivotelements gleich Null sind, so wird das Pivotelement der Hauptdiagonale nach unten/rechts bewegt. Dies wird wiederholt, bis das Pivotelement das rechte ende der Matrix erreicht hat. Falls ein Pivotelement gleich 0 ist, muss die Zeile so vertauscht werden, dass das neue Pivotelement nicht gleich Null ist.

$$P = \begin{pmatrix} i_P \\ j_P \end{pmatrix}$$

Beispiel einer Matrix / Vektor Kombination auf die der Gauss-Algorithmus angewendet wurde.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

4.2 LGS lösen

Um das LGS mit dem Matrix/Vektor Kombination zu lösen wird rückwärts eingesetzt. Es ist die Matrix / Vektor Kombination gegeben:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Solve for x_3 : $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3$

Solve for x_2 : $0 \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2$

Solve for x_1 : $a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1$

4.3 Keine Lösung

Falls eine Zeile der Matrix nur aus Nullen besteht und der b -Vektor nicht gleich Null ist gibt es keine Lösung für das LGS.

$$b_3 \neq 0, * = \text{any number}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ * \\ b_3 \end{bmatrix}$$

4.4 Unendlich viele Lösungen / Parameter

Falls eine Variable Teil des x -Vektors in keine Zeile der Matrix A keine Pivotelement ein einer Spalte besitzt, somit muss diese Variable als Parameter ausgedrückt werden. Bsp.:

$$* = \text{any number}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

Somit muss die Variable x_4 als Parameter ausgedrückt werden.

$$x_4 = t \in \mathbb{K}$$

4.5 Lösungsmenge

4.6 Eine Lösung

Wenn das LGS eine Lösung besitzt, kann die Lösung als Vektor geschrien werden. Wobei x_{nL} die Lösungen der Variablen des LGS sind.

$$x = \begin{bmatrix} x_{1L} \\ \vdots \\ x_{nL} \end{bmatrix}$$

4.7 Unendlich viele Lösungen

Wenn das LGS unendlich viele Lösungen besitzt, so kann die Lösung wie folgt geschrieben werden.

$$* = \text{any number, you know what the fuck you are doing}$$

$$x = \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} \cdots, t \in \mathbb{K}, \cdots$$

- 1 Parameter $\Rightarrow$ Linie im Raum
- 2 Parameter $\Rightarrow$ Fläche im Raum
- 3 Parameter $\Rightarrow$ Volumen im Raum

4.8 Kern / homogenes LGS

$$Ax = 0$$

$\ker(A)$ ist die Bezeichnung für die Lösungsmenge eines homogenen LGS.

4.9 Dimension

$\dim(A)$ ist die Bezeichnung für die Anzahl freien Variablen (Parameter) der Lösung eines homogenen LGS.

4.10 Rang

$\text{rang}(A)$ ist die Bezeichnung für die Anzahl der fixen Variablen der Lösung eines homogenen LGS.

5 Seiten im Formelbuch

- Vektoren: S27, S104, S105, S106
- Matrizen: S24, S28, S34
- Komplexe Zahlen: S18, S19

6 Symbole

- $\iff$: If and only if
- $\Rightarrow$: Implies

