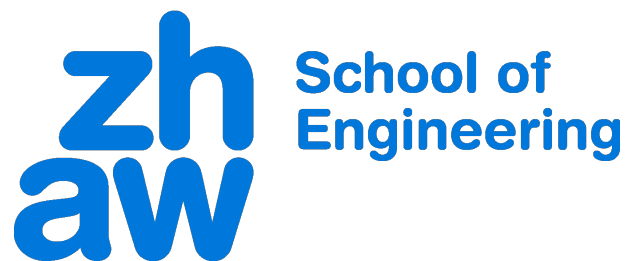


ZHAW Zurich University of Applied Sciences
Winterthur



Zusammenfassung AN3

Studienwochen 1-14

Written by: Severin Sprenger
June 17, 2026
Zf. AN3 SW 1-14

1 Fourierreihe

$$s(t) = \frac{a_0}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot t))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} s(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} s(t) \cdot \cos(n \cdot t) dt \quad | n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} s(t) \cdot \sin(n \cdot t) dt \quad | n \in \mathbb{N}$$

1.1 Konvergenz

Wenn eine Funktion $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $2 \cdot \pi$ Periodisch ist, wird die Fourierreihe Punktweise gegen s konvergieren, sofern die Funktion s keine Unstetigkeiten im betrachteten Intervall aufweist.

2 Fourierreihe für T -periodische Signale

$$s(t) = \frac{a_0}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t))$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt$$

$$a_k = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) dt \quad | k \in \mathbb{N}$$

$$b_k = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t) dt \quad | k \in \mathbb{N}$$

3 Komplexe Schreibweise der Fourierreihe

$$\cos(k \cdot t) = \frac{e^{i \cdot k \cdot t} + e^{-i \cdot k \cdot t}}{2}$$

$$\sin(k \cdot t) = \frac{e^{i \cdot k \cdot t} - e^{-i \cdot k \cdot t}}{2 \cdot i}$$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - i \cdot b_k}{2} \cdot e^{i \cdot k \cdot t} + \frac{a_k + i \cdot b_k}{2} \cdot e^{-i \cdot k \cdot t} \right)$$

$$\Rightarrow b_0 = 0, \quad a_{-k} = a_k, \quad b_{-k} = -b_k$$

$$\alpha_k = \frac{a_k - i \cdot b_k}{2} \quad | k \in \mathbb{N}_0$$

$$s(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cdot e^{i \cdot k \cdot t} + \alpha_{-k} \cdot e^{-i \cdot k \cdot t})$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \cdot e^{i \cdot k \cdot t}$$

3.1 Für T -periodische Signale

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot k \cdot t}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot k \cdot t}$$

4 Diskretes/Kontinuierliches Spektrum

Ein Spektrum wird als diskret bezeichnet, wenn dieses eine Abbildung aus $\mathbb{Z}$ ist nur nicht aus $\mathbb{R}$. Ein diskretes Spektrum kann sich als Peaks mit Abstand $n \cdot w_0 \mid n \in \mathbb{Z}$ vorgestellt werden oder als voneinander isolierte Punkt auf dem Spektrum.

Ein Spektrum wird als kontinuierlich bezeichnet, wenn jedem Wert in $\mathbb{R}$ ein Wert c_k zugewiesen werden kann.

5 Wichtige Fourierreihen

$$d(x) = \begin{cases} \frac{x + \pi}{\pi}, & \text{für } -\pi < x \leq 0 \\ \frac{x - \pi}{\pi}, & \text{für } 0 < x < \pi \\ d(x \bmod 2 \cdot \pi) \end{cases}$$

$$d(x) \approx \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^n \frac{4}{\pi^2 \cdot (2 \cdot k + 1)^2} \cdot \cos((2 \cdot k + 1) \cdot x)$$

$$h_a(x) = \begin{cases} -a, & \text{für } -\pi < x < 0 \\ 0, & \text{für } x = 0, x = \pm\pi \\ a, & \text{für } 0 < x < \pi \\ h_a(x \bmod \pi) \end{cases}$$

$$h_a(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{4 \cdot a}{\pi \cdot (2 \cdot k + 1)} \cdot \sin((2 \cdot k + 1) \cdot x)$$

$$s(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & \text{für } 0 < x < 2 \cdot \pi \\ 0, & \text{für } x = 0 \\ s(x \bmod 2 \cdot \pi) \end{cases}$$

$$s(x) \approx \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \sin(k \cdot x)$$

6 Stückweise Glattheit

$$s : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto s(t)$$

Eine Funktion wird als stückweise Glatt bezeichnet wenn diese stetig differenzierbar ist, ausser in endlich vielen Punkten t_i und der folgende Ausdruck wahr ist.

$$\lim_{t \searrow t_i} s(t) \neq \lim_{t \nearrow t_i} s(t)$$

Das Bild der Punkte t_i wird dann wie folgt definiert.

$$\begin{aligned}s(t_i^+) &= \lim_{t \nearrow t_i} s(t) \\ s(t_i^-) &= \lim_{t \searrow t_i} s(t) \\ s(t_i) &= \frac{s(t_i^+) + s(t_i^-)}{2}\end{aligned}$$

7 Sinc-Funktion

$$\begin{aligned}\text{sinc}(x) &:= \begin{cases} \frac{\sin(\pi \cdot f)}{\pi \cdot f} & \text{für } f \neq 0 \\ 1 & \text{für } f = 0 \end{cases} \\ \text{sinc}(k \cdot \pi) &= 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

8 Absolute Integrierbarkeit

$$\begin{aligned}s &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto s(t)\end{aligned}$$

Eine Funktion s wird als absolut integrierbar bezeichnet, wenn der folgende Ausdruck erfüllt sind.

$$\exists \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt$$

9 Fouriertransformation

$$\begin{aligned}s &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto s(t)\end{aligned}$$

Die Funktion s ist ebenfalls stückweise stetig sowie absolut integrierbar. Wenn diese Voraussetzungen erfüllt sind existiert die Fouriertransformierte $\hat{s}$ für $f \in \mathbb{R}$.

$$\hat{s}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt, \quad f \in \mathbb{R}$$

Die Fouriertransformierte oder Spektralfunktion kann auch in der folgenden Notation geschrieben werden.

$$\mathfrak{F}[s(t)](f) \equiv \hat{s}(f)$$

10 Wichtige Fouriertransformationen

10.1 Rechteckimpuls

$$\begin{aligned}r_a(t) &= \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq a \\ 0 & \text{für } |t| > a \end{cases} \\ \mathfrak{F}[r_a(t)](f) &= 2 \cdot a \cdot \text{sinc}(2 \cdot a \cdot f)\end{aligned}$$

10.2 Puls

$$\begin{aligned}\text{rect}(t) &= r_{\frac{1}{2}}(t) \\ \mathfrak{F}[\text{rect}(t)](f) &= \text{sinc}(f)\end{aligned}$$

10.3 Skalierter Puls

$$\begin{aligned}s_n(t) &= \frac{n}{2} \cdot r_{\frac{1}{n}}(t) \\ \mathfrak{F}[s_n(t)](f) &= \text{sinc}\left(2 \cdot \frac{f}{n}\right)\end{aligned}$$

10.4 Dirac-Funktion

Die Dirac-Funktion ist ein Grenzfall wenn des skalierten Pulses s_n mit $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}\delta(t) &:= \mathfrak{F}^{-1}[1](t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t) \\ &= \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Die Dirac-Funktion hat folgende Eigenschaften.

$$\begin{aligned}\delta(-t) &= \delta(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= 1 \\ \mathfrak{F}[\delta(t)](f) &= 1, \quad f \in \mathbb{R} \\ (x * \delta)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \cdot \delta(t-s) ds = x(t)\end{aligned}$$

11 Inverse Fouriertransformation

$$\begin{aligned}\frac{s(x+) + s(x-)}{2} &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \hat{s}(f) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot x \cdot f} df \\ \mathfrak{F}^{-1}[\hat{s}(f)](x) &:= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \hat{s}(f) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot x \cdot f} df\end{aligned}$$

12 Faltung

$$(s_1 * s_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(u) \cdot s_2(t-u) du$$

13 Eigenschaften der Fouriertransformation

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[s_1 + s_2] &= \mathfrak{F}[s_1] + \mathfrak{F}[s_2] \\ \mathfrak{F}[\alpha \cdot s] &= \alpha \cdot \mathfrak{F}[s] \mid \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Wenn s in $\mathbb{R}$ stückweise stetig und auf allen stetigen Abschnitten absolut integrierbar ist, dann gelten folgende Eigenschaften.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}[s(t \pm h)] &= e^{\pm i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot h} \cdot \mathfrak{F}[s(t)], \quad f \in \mathbb{R} \\
\mathfrak{F}^{-1}[\hat{s}(f \pm h)] &= e^{\mp i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot h} \cdot \mathfrak{F}^{-1}[\hat{s}(f)], \quad t \in \mathbb{R} \\
\mathfrak{F}[s(a \cdot t)] &= \frac{1}{|a|} \cdot \mathfrak{F}[s(t)] \cdot \left(\frac{f}{a}\right) \\
\mathfrak{F}^{-1}[\hat{s}(a \cdot f)] &= \frac{1}{|a|} \cdot \mathfrak{F}[\hat{s}(f)] \cdot \left(\frac{t}{a}\right) \\
\mathfrak{F}[s(-t)](f) &= \mathfrak{F}[s(t)](-f) \\
\mathfrak{F}[\hat{s}(t)](f) &= s(-f) \\
\mathfrak{F}[s_1 * s_2] &= \mathfrak{F}[s_1] \cdot \mathfrak{F}[s_2]
\end{aligned}$$

Wenn s und s' in ganz $\mathbb{R}$ absolut integrierbar ist und s ebenfalls eine stückweise glatte Funktion ist, dann gelten folgende Eigenschaften.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}[s'(t)] &= (i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f) \cdot \mathfrak{F}[s(t)], \quad f \in \mathbb{R} \\
\mathfrak{F}^{-1}[\hat{s}'(t)] &= (-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f) \cdot \mathfrak{F}^{-1}[\hat{s}(t)], \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Wenn s in $\mathbb{R}$ stückweise glatt ist, s, s' in $\mathbb{R}$ absolut integrierbar ist und s Unstetigkeiten in a_n besitzt, dann gilt folgende Eigenschaft.

$$\mathfrak{F}[s'(t)] = (i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f) \cdot \mathfrak{F}[s(t)] - \sum_{k=1}^n (s(a_k+) - s(a_k-)) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot a_k}, \quad f \in \mathbb{R}$$

Wenn s eine $(r-1)$ -mal stetig differenzierbare, $s^{(r-1)}$ in $\mathbb{R}$ stückweise glatt und $s, s', \dots, s^{(r)}$ in $\mathbb{R}$ absolut integrierbar ist, dann gilt folgende Eigenschaft.

$$\mathfrak{F}[s^{(r)}(t)](f) = (i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^r \cdot \mathfrak{F}[s(t)], \quad f \in \mathbb{R}$$

14 Vorzeichenfunktion

$$\begin{aligned}
y_n(t) &= \begin{cases} -1, & \text{für } t < -\frac{1}{n} \\ n \cdot t, & \text{für } -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \text{für } \frac{1}{n} < t \end{cases} \\
\mathfrak{F}[y_n(t)] &= \frac{1}{i \cdot \pi \cdot f} \cdot \text{sinc}\left(\frac{2}{n} \cdot f\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{sign}(t) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) \\
&= \begin{cases} -1, & \text{für } t < 0 \\ 0, & \text{für } t = 0 \\ 1, & \text{für } t > 0 \end{cases} \\
\mathfrak{F}[\text{sign}(t)](f) &= \frac{1}{i \cdot \pi \cdot f} \\
\frac{d}{dt} \text{sinc}(t) &= 2 \cdot \delta(t)
\end{aligned}$$

15 Heaviside-Funktion (Einheitssprung)

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \frac{1}{2} \cdot (\text{sign}(t) + 1) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{für } t < 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{für } t = 0 \\ 1, & \text{für } t > 0 \end{cases} \\ \mathfrak{F}[\sigma(t)](f) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{i \cdot \pi \cdot f} + \delta(f) \right) \\ \frac{d}{dt} \sigma(t) &= \delta(t)\end{aligned}$$

16 Normierter Vektorraum

Ein Paar aus Vektorraum und dazugehörige Norm wird als normierter Vektorraum bezeichnet.

$$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$$

17 Norm

$$\begin{aligned}\|\alpha \cdot \vec{x}\| &= |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \|\vec{x} + \vec{y}\| &\leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \\ \|\vec{x}\| = 0 &\iff \vec{x} = \vec{0}\end{aligned}$$

$C(I)$ ist der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall I

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\|_{\infty} &:= \max_{i=1, \dots, n} |x_i|, \quad \vec{x} \in \mathbb{K}^n \\ \|f\|_{\infty} &:= \max_{x \in I} |f(x)|, \quad f \in C(I)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\|_p &:= \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^p \right)^{1/p}, \quad \vec{x} \in \mathbb{K}^n \\ \|f\|_p &:= \left(\int_I |f(x)|^p \right)^{1/p}, \quad f \in C(I)\end{aligned}$$

18 Lipschitz-Stetigkeit

$$\begin{aligned}f &: V \rightarrow W \\ \exists (V, \|\cdot\|), (W, \|\cdot\|)\end{aligned}$$

Eine Abbildung wird als Lipschitz-stetig bezeichnet wenn folgender Ausdruck wahr ist.

$$\|f(v) - f(w)\|_W \leq L \cdot \|v - w\|_V, \quad |L| > 0, \quad \forall v, w \in V$$

19 Skalarprodukt

$$(\gamma \cdot x + \lambda \cdot z, y) = \gamma \cdot (x, y) + \lambda \cdot (z, y), \quad \forall x, y, z \in V, \quad \forall \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}(y, x) &= (x, y), \quad \forall x, y \in V \\ (x, x) &> 0, \quad \forall x \neq 0 \\ (x, x) &= 0 \iff x = 0\end{aligned}$$

19.1 Cauchy-Schwarz Ungleichung

Wenn V ein reeller Vektorraum mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ ist, dann gilt folgende Ungleichung.

$$|(v, w)| \leq \|v\|_2 \cdot \|w\|_2, \quad \forall v, w \in V$$

20 Vektorfolgen

Die Vektorfolge $\vec{a}_k$ nähert sich mit zunehmendem k dem Vektor $\vec{a}$ an. Die Folge kann analog zur Zahlenfolge aus Analysis 1 definiert werden (absolut, iterativ).

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \dots$$

Wenn die Vektorfolge $\vec{a}_k$ zu $\vec{a}$ konvergiert, gelten folgende Ausdrücke.

$$\begin{aligned}\|\vec{a}_k - \vec{a}\| &< \varepsilon \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{a}_k &= \vec{a}\end{aligned}$$

21 Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned}\vec{y} &= \vec{f}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in D, \quad \vec{y} \in M \\ \vec{f} &: D \rightarrow M\end{aligned}$$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

22 Stetigkeit in $\mathbb{R}^n$

Die Abbildung $\vec{f}$ wird im Punkt $\vec{x}_0$ als stetig in einem Punkt bezeichnet, wenn diese wenn diese für alle Folgen $\vec{x}_k$ zum gleichen Wert konvergiert. *Aka. Der Wert ist unabhängig von der Annäherungsrichtung der gleiche.*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{f}(\vec{x}_k) = \vec{f}(\vec{x}_0)$$

Die Abbildung $\vec{f}$ wird auf A eine stetige Abbildung genannt, falls jeder Punkt in A als stetig bezeichnet werden kann.

$$\begin{aligned}\vec{f}: D &\rightarrow M \\ A &\subset D \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{f}(\vec{x}_k) &= \vec{f}(\vec{x}_0), \quad \forall \vec{x}_k \in A\end{aligned}$$

$$\int_a^b$$

23 ε - δ -Charakterisierung

Die Abbildung $\vec{f}: D \rightarrow M$ ist im Punkt $\vec{x}_0 \in D$ stetig, wenn folgende Ausdrücke wahr sind.

$$\begin{aligned}\vec{x}_0 &\in D \\ \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_D &< \delta, \quad |\delta| > 0 \\ \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\|_M &< \varepsilon, \quad |\varepsilon| > 0 \\ &\exists(\varepsilon, \delta)\end{aligned}$$

24 Partielle Ableitung

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_k}(\vec{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(x_1, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - \vec{f}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{h} \\ \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_k}(\vec{x}) &\equiv \vartheta_{x_k} \vec{f}(\vec{x}) \equiv \vec{f}_{x_k}(\vec{x})\end{aligned}$$

25 Ableitungsmatrix (Jacobi-Matrix)

$$\vec{f}: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\begin{aligned}D\vec{f}(\vec{x}_0) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \\ D\vec{f}(\vec{x}_0) &\equiv \vec{f}'(\vec{x}_0) \\ \vec{f}'(\vec{x}_0) &\in \mathbb{R}^{m \times n}\end{aligned}$$

25.1 Differenzierbarkeit

Die Abbildung $\vec{f}: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ wird im Punkt $\vec{x}_0 \in D$ als differenzierbar bezeichnet, wenn $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$ partiell differenzierbar ist und diese in der folgenden Form beschrieben werden kann und folgende Eigenschaft aufweist.

$$\begin{aligned}\vec{f}(\vec{x}) &= \vec{f}(\vec{x}_0) + \vec{f}'(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{k}(\vec{x}) \\ 0 &= \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\|\vec{k}(\vec{x})\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|}\end{aligned}$$

Die Abbildung $\vec{f}$ wird in $A \subset D$ differenzierbare Abbildung bezeichnet, wenn $\vec{f}$ in jedem Punkt von A differenzierbar ist.

25.2 Kettenregel

$$D(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{x}) = (D\vec{f} \circ \vec{g}(\vec{x})) \cdot D\vec{g}(\vec{x})$$

26 Richtungsableitung

$$\frac{\partial}{\partial \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}_0) := \vec{f}'(\vec{x}_0) \cdot \vec{a}$$

27 Gradient

$$\text{grad } f(\vec{x}) = Df(\vec{x})^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} = \frac{\text{grad } f(\vec{x}_0)}{|\text{grad } f(\vec{x}_0)|} \implies \vec{a} \text{ maximal}$$

28 Totale Differential

$$\vec{f}'(\vec{x}_0) \cdot d\vec{x} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_k}(\vec{x}_0) dx_k$$

29 Höhere partielle Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} \right) (\vec{x}) = \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x_k \partial x_j} (\vec{x}) = \vec{f}_{x_k, x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_k, x_j} \vec{f}(\vec{x})$$

30 Nabla-Operator

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\text{grad } \vec{f}(x) = \nabla \vec{f}(x)$$

31 Hess'sche Matrix

$$H = \nabla^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$(\vec{h} \cdot \nabla)^2 \cdot f(\vec{x}) = \vec{h}^T \cdot H f(\vec{x}) \cdot \vec{h}$$

32 Taylorformel im $\mathbb{R}^n$

Es wird verlangt, dass die Abbildung $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ in D $(p+1)$ -mal stetig differenzierbar. Wenn die Strecke $[\vec{a}, \vec{a} + \vec{h}]$ zusätzlich im inneren von D liegt, dann gilt folgende Taylorformel und das dazugehörige Restglied. Der Vektor $\vec{a}$ kann als Entwicklungspunkt interpretiert werden und $\vec{h}$ als Abstand zum Entwicklungspunkt.

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{a} + \vec{h}] &= \left\{ \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{h} \mid 0 \leq t \leq 1 \right\} \\ \vec{f}(\vec{a} + \vec{h}) &= \vec{R}(\vec{a}, \vec{h}) + \vec{f}(\vec{a}) + \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{k!} \cdot (\vec{h} \cdot \nabla)^k \cdot \vec{f}(\vec{a}) \right) \\ \vec{R}(\vec{a}, \vec{h}) &= \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} \cdot (\vec{h} \cdot \nabla)^{p+1} \cdot \vec{f}(\vec{a} + t \cdot \vec{h}) dt \end{aligned}$$

33 Divergenz

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{f} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) = \nabla \vec{f}(\vec{x}) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{aligned}$$

Felder die folgenden Eigenschaft aufweisen, werden als quellenfrei bezeichnet.

$$\operatorname{div} \vec{f} = 0$$

34 Rotation

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{f} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{rot} \vec{f}(\vec{x}) = \nabla \times \vec{f}(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} \vartheta_{x_2} \cdot f_3(\vec{x}) - \vartheta_{x_3} \cdot f_2(\vec{x}) \\ \vartheta_{x_3} \cdot f_1(\vec{x}) - \vartheta_{x_1} \cdot f_3(\vec{x}) \\ \vartheta_{x_1} \cdot f_2(\vec{x}) - \vartheta_{x_2} \cdot f_1(\vec{x}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Felder die folgenden Eigenschaft aufweisen, werden als wirbelfrei bezeichnet.

$$\operatorname{rot} \vec{f} = 0$$

35 Produktregeln (Nabla, Divergenz, Rotation)

$$\begin{aligned} \nabla(f \cdot g) &= f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f \\ \operatorname{div}(f \cdot \vec{v}) &= \nabla f \cdot \vec{v} + f \cdot \operatorname{div} \vec{v} \\ \operatorname{rot}(f \cdot \vec{v}) &= \nabla f \times \vec{v} + f \cdot \operatorname{rot} \vec{v} \end{aligned}$$

36 Laplace

$$\Delta f(\vec{x}) = \operatorname{div}(\nabla f(\vec{x})) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{x}) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec{x})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha \cdot \vec{f} + \vec{g}) &= \alpha \cdot \mathcal{L} \cdot \vec{f} + \mathcal{L} \vec{g} \\ \mathcal{L} &\in \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j}, D, \operatorname{grad}, \nabla, \operatorname{div}, \operatorname{rot}, H, \Delta \right\} \end{aligned}$$

37 Newton-Verfahren im $\mathbb{R}^n$

Für das Newton-Verfahren ist eine Abbildung $\vec{f}$ gegen, für welche ein Punkt $\vec{x}_n$ gefunden werden soll, wobei $\vec{f}(\vec{x}_n) = \vec{0}$ erfüllt werden soll. Die Abbildung $\vec{g}$ beschreibt folgend die Linearisierung der Abbildung $\vec{f}$ im Punkt $\vec{x}_n$.

$$\vec{g}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + \vec{f}'(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_n &= \vec{f}'(\vec{x}_n)^{-1} \cdot \vec{f}(\vec{x}_n) \\ \vec{x}_{n+1} &= \vec{x}_n - \vec{\delta}_n\end{aligned}$$

38 Extremalprobleme ohne Nebenbedingungen

Eine Extremstelle muss folgenden Ausdruck erfüllen

$$\vec{f}'(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

und kann durch die folgende Fallunterscheidung als Maxima, Minima oder Sattelpunkt eingeordnet werden.

$$\begin{cases} \vec{z}^T \cdot \text{Hf}(\vec{x}_0) \cdot \vec{z} < 0, \forall \vec{z} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}, & \vec{x}_0 \text{ ist eine echte Maximalstelle} \\ \vec{z}^T \cdot \text{Hf}(\vec{x}_0) \cdot \vec{z} > 0, \forall \vec{z} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}, & \vec{x}_0 \text{ ist eine echte Minimalstelle} \\ \text{sonst,} & \vec{x}_0 \text{ ist ein Sattelpunkt} \end{cases}$$

39 Symbole

- $\iff$: If and only if
- $\implies$: Implies
- $\equiv$: Equivalent
- $\forall$: For all
- $\exists$: Exists
- $\nearrow$: Approach from the right
- $\searrow$: Approach from the left

