ZHAW Zurich University of Applied Sciences
Winterthur

Zusammenfassung AN3
Studienwochen 1-6

Written by: Severin Sprenger
November 12, 2025
Zf. AN3 SW 1-6

1 Fourierreihe

$$s(t) = \frac{a_0}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos(n \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot t)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} s(t)\ dt$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} s(t) \cdot \cos(n \cdot t)\ dt \ \ |n \in \mathbb{N}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} s(t) \cdot \sin(n \cdot t)\ dt \ \ |n \in \mathbb{N}$$

1.1 Konvergenz

Wenn eine Funktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $2 \cdot \pi$ Periodisch ist, wird die Fourierreihe Punktweise gegen s konvergieren, sofern die Funktion s keine Unstetigkeiten im betrachteten Interval aufweist.

2 Fourierreihe für T-periodische Signale

$$s(t) = \frac{a_0}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t)\ dt$$
$$a_k = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t)\ dt \ \ |k \in \mathbb{N}$$
$$b_k = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)\ dt \ \ |k \in \mathbb{N}$$

3 Komplexe Schreibweise der Fourierreihe

$$\cos(k \cdot t) = \frac{e^{i \cdot k \cdot t} + e^{-i \cdot k \cdot t}}{2}$$
$$\sin(k \cdot t) = \frac{e^{i \cdot k \cdot t} - e^{-i \cdot k \cdot t}}{2 \cdot i}$$

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - i \cdot b_k}{2} \cdot e^{i \cdot k \cdot t} + \frac{a_k + i \cdot b_k}{2} \cdot e^{-i \cdot k \cdot t}\right)$$
$$\implies b_0 = 0, \quad a_{-k} = a_k, \quad b_{-k} = -b_k$$

$$\alpha_k = \frac{a_k - i \cdot b_k}{2} \ \ |k \in \mathbb{N}_0$$
$$s(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cdot e^{i \cdot k \cdot t} + \alpha_{-k} \cdot e^{-i \cdot k \cdot t}\right)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \cdot e^{i \cdot k \cdot t}$$

3.1 Für T-periodische Signale

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot k \cdot t}$$
$$c_k = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot k \cdot t}$$

4 Diskretes/Kontinuierliches Spektrum

Ein Spektrum wird als diskret bezeichnet, wenn dieses eine Abbildung aus $\mathbb{Z}$ ist nur nicht aus $\mathbb{R}$. Ein diskretes Spektrum kann sich als Peaks mit Abstand $n \cdot w_0 \mid n \in \mathbb{Z}$ vorgestellt werden oder als voneinander isolierte Punkt auf dem Spektrum.

Ein Spektrum wird als kontinuierlich bezeichnet, wenn jedem Wert in $\mathbb{R}$ ein Wert c_k zugewiesen werden kann.

5 Wichtige Fourierreihen

$$d(x) = \begin{cases} \frac{x+\pi}{\pi}, & \text{für } -\pi < x \leq 0 \\ \frac{x-\pi}{\pi}, & \text{für } 0 < x < \pi \\ d(x \mod 2 \cdot \pi) \end{cases}$$
$$d(x) \approx \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{\pi^2 \cdot (2 \cdot k + 1)^2} \cdot \cos((2 \cdot k + 1) \cdot x)$$

$$h_a(x) = \begin{cases} -a, & \text{für } -\pi < x < 0 \\ 0, & \text{für } x = 0, x = \pm\pi \\ a, & \text{für } 0 < x < \pi \\ h_a(x \mod \pi) \end{cases}$$
$$h_a(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{4 \cdot a}{\pi \cdot (2 \cdot k + 1)} \cdot \sin((2 \cdot k + 1) \cdot x)$$

$$s(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & \text{für } 0 < x < 2 \cdot \pi \\ 0, & \text{für } x = 0 \\ s(x \mod 2 \cdot \pi) \end{cases}$$
$$s(x) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot \sin(k \cdot x)$$

6 Stückweise Glattheit

$$\begin{aligned} s : I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto s(t) \end{aligned}$$

Eine Funktion wird als stückweise Glatt bezeichnet wenn diese stetig differenzierbar ist, ausser in endlich vielen Punkten t_i und der folgende Ausdruck wahr ist.

$$\lim_{t \searrow t_i} s(t) \neq \lim_{t \nearrow t_i} s(t)$$

Das Bild der Punkte t_i wird dann wie folgt definiert.

$$
\begin{aligned}
s\left(t_i^+\right) &= \lim_{t \nearrow t_i} s\left(t\right) \\
s\left(t_i^-\right) &= \lim_{t \searrow t_i} s\left(t\right) \\
s\left(t_i\right) &= \frac{s\left(t_i^+\right) + s\left(t_i^-\right)}{2}
\end{aligned}
$$

7 Sinc-Funktion

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sinc}\left(x\right) &:= \frac{\sin\left(x\right)}{x} \\
\operatorname{sinc}\left(k \cdot \pi\right) &= 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

8 Absolute Integrierbarkeit

$$
\begin{aligned}
s : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
t &\mapsto s\left(t\right)
\end{aligned}
$$

Eine Funktion s wird als absolut integrierbar bezeichnet, wenn der folgende Ausdruck erfüllt sind.

$$
\exists \int_{-\infty}^{\infty} \left|s\left(t\right)\right| dt
$$

9 Fouriertransformation

$$
\begin{aligned}
s : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
t &\mapsto s\left(t\right)
\end{aligned}
$$

Die Funktion s ist ebenfalls stückweise stetig sowie absolut integrierbar. Wenn diese Voraussetzungen erfüllt sind existiert die Fouriertransformierte $\hat{s}$ für $f \in \mathbb{R}$.

$$
\hat{s}\left(f\right) = \int_{-\infty}^{\infty} s\left(t\right) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t}\, dt, \qquad f \in \mathbb{R}
$$

Die Fouriertransformierte oder Spektralfunktion kann auch in der folgenden Notation geschrieben werden.

$$
\mathfrak{F}\left[s\left(t\right)\right]\left(f\right) \equiv \hat{s}\left(f\right)
$$

10 Rechteckfunktion

$$
\begin{aligned}
s_n\left(t\right) &= \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{für } \left|t\right| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für } \left|t\right| > \frac{1}{n} \end{cases} \\
\mathfrak{F}\left[s_n\left(t\right)\right]\left(f\right) &= \frac{n}{2} \cdot \begin{cases} \frac{1}{\pi \cdot f} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{n}\right) & \text{für } f \neq 0 \\ \frac{2}{n} & \text{für } f = 0 \end{cases} \\
&= \operatorname{sinc}\left(2 \cdot \frac{f}{n}\right)
\end{aligned}
$$

10.1 Dirac-Funktion

Die Dirac-Funktion ist ein Grenzfall wenn die Rechteckfunktion s_n mit $n \to \infty$ betrachtet wird.

$$\begin{aligned} \delta(t) &:= \mathfrak{F}^{-1}[1](t) \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n(t) \\ &= \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Die Dirac-Funktion hat folgende Eigenschaften.

$$\begin{aligned} \delta(-t) = \delta(t)\,, \quad t \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \\ \mathfrak{F}[\delta(t)](f) = 1, \quad f \in \mathbb{R} \\ (x * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \cdot \delta(t-s)\, ds = x(t) \end{aligned}$$

11 Inverse Fouriertransformation

$$\begin{aligned} \frac{s(x+) + s(x-)}{2} &= \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \hat{s}(f) \cdot e^{i\cdot 2\cdot\pi\cdot x\cdot f}\, df \\ \mathfrak{F}^{-1}[\hat{s}(f)](x) &:= \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \hat{s}(f) \cdot e^{i\cdot 2\cdot\pi\cdot x\cdot f}\, df \end{aligned}$$

12 Faltung

$$(s_1 * s_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(u) \cdot s_2(t-u)\, du$$

13 Eigenschaften der Fouriertransformation

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[s_1 + s_2] &= \mathfrak{F}[s_1] + \mathfrak{F}[s_2] \\ \mathfrak{F}[\alpha \cdot s] &= \alpha \cdot \mathfrak{F}[s] \mid \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Wenn s in $\mathbb{R}$ stückweise stetig und auf allen stetigen Abschnitten absolut integrierbar ist, dann gelten folgende Eigenschaften.

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[s(t \pm h)] &= e^{\pm i\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot h} \cdot \mathfrak{F}[s(t)]\,, \quad f \in \mathbb{R} \\ \mathfrak{F}^{-1}[\hat{s}(f \pm h)] &= e^{\mp i\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot h} \cdot \mathfrak{F}^{-1}[\hat{s}(f)]\,, \quad t \in \mathbb{R} \\ \mathfrak{F}[s(a \cdot t)] &= \frac{1}{|a|} \cdot \mathfrak{F}[s(t)] \cdot \left(\frac{f}{a}\right) \\ \mathfrak{F}^{-1}[\hat{s}(a \cdot f)] &= \frac{1}{|a|} \cdot \mathfrak{F}[\hat{s}(f)] \cdot \left(\frac{t}{a}\right) \\ \mathfrak{F}[s(-t)](f) &= \mathfrak{F}[s(t)](-f) \\ \mathfrak{F}[\hat{s}(t)](f) &= s(-f) \\ \mathfrak{F}[s_1 * s_2] &= \mathfrak{F}[s_1] \cdot \mathfrak{F}[s_2] \end{aligned}$$

Wenn s und s' in ganz $\mathbb{R}$ absolut integrierbar ist und s ebenfalls eine stückweise glatte Funktion ist, dann gelten folgende Eigenschaften.

$$\mathfrak{F}\left[s'\left(t\right)\right] = \left(i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f\right) \cdot \mathfrak{F}\left[s\left(t\right)\right], \quad f \in \mathbb{R}$$
$$\mathfrak{F}^{-1}\left[\hat{s}'\left(t\right)\right] = \left(-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f\right) \cdot \mathfrak{F}^{-1}\left[\hat{s}\left(t\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$$

Wenn s in $\mathbb{R}$ stückweise glatt ist, s, s' in $\mathbb{R}$ absolut integrierbar ist und s Unstetigkeiten in a_n besitzt, dann gilt folgende Eigenschaft.

$$\mathfrak{F}\left[s'\left(t\right)\right] = \left(i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f\right) \cdot \mathfrak{F}\left[s\left(t\right)\right] - \sum_{k=1}^{n} \left(s\left(a_k+\right) - s\left(a_k-\right)\right) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot a_k}, \quad f \in \mathbb{R}$$

Wenn s eine $(r-1)$-mal stetig differenzierbare, $s^{(r-1)}$ in $\mathbb{R}$ stückweise glatt und $s, s', \ldots s^{(r)}$ in $\mathbb{R}$ absolut integrierbar ist, dann gilt folgende Eigenschaft.

$$\mathfrak{F}\left[s^{(r)}\left(t\right)\right]\left(f\right) = \left(i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f\right)^r \cdot \mathfrak{F}\left[s\left(t\right)\right], \quad f \in \mathbb{R}$$

14 Vorzeichenfunktion

$$\begin{aligned}
y_n\left(t\right) &= \begin{cases} -1, & \text{für } t < -\frac{1}{n} \\ n \cdot t, & \text{für } -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \text{für } \frac{1}{n} < t \end{cases} \\
\mathfrak{F}\left[y_n\left(t\right)\right] &= \frac{1}{i \cdot \pi \cdot f} \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{2}{n} \cdot f\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sign}\left(t\right) &:= \lim_{n \to \infty} y_n\left(t\right) \\
&= \begin{cases} -1, & \text{für } t < 0 \\ 0, & \text{für } t = 0 \\ 1, & \text{für } t > 0 \end{cases} \\
\mathfrak{F}\left[\operatorname{sign}\left(t\right)\right]\left(f\right) &= \frac{1}{i \cdot \pi \cdot f} \\
\frac{d}{dt}\operatorname{sinc}\left(t\right) &= 2 \cdot \delta\left(t\right)
\end{aligned}$$

15 Heaviside-Funktion (Einheitssprung)

$$\begin{aligned}
\sigma\left(t\right) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\operatorname{sign}\left(t\right) + 1\right) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{für } t < 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{für } t = 0 \\ 1, & \text{für } t > 0 \end{cases} \\
\mathfrak{F}\left[\sigma\left(t\right)\right]\left(f\right) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{i \cdot \pi \cdot f} + \delta\left(f\right)\right) \\
\frac{d}{dt}\sigma\left(t\right) &= \delta\left(t\right)
\end{aligned}$$

16 Normierter Vektorraum

Ein Paar aus Vektorraum und dazugehörige Norm wird als normierter Vektorraum bezeichnet.

$$\left(\mathbb{R}^n, ||\cdot||\right)$$

17 Norm

$$
\begin{aligned}
||\alpha \cdot \vec{x}|| &= |\alpha| \cdot ||\vec{x}||, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R} \\
||\vec{x} + \vec{y}|| &\leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \\
||\vec{x}|| &= 0 \iff \vec{x} = \vec{0}
\end{aligned}
$$

$C(I)$ ist der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Interval I

$$
\begin{aligned}
||\vec{x}||_\infty &:= \max_{i=1,\dots,n} |x_i|, \quad \vec{x} \in \mathbb{K}^n \\
||f||_\infty &:= \max_{x \in I} |f(x)|, \quad f \in C(I)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
||\vec{x}||_p &:= \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^p \right)^{1/p}, \quad \vec{x} \in \mathbb{K}^n \\
||f||_p &:= \left(\int_I |f(x)|^p \right)^{1/p}, \quad f \in C(I)
\end{aligned}
$$

18 Lipschitz-Stetigkeit

$$
\begin{gathered}
f : V \to W \\
\exists (V, ||\cdot||), \quad (W, ||\cdot||)
\end{gathered}
$$

Eine Abbildung wird als Lipschitz-stetig bezeichnet wenn folgender Ausdruck wahr ist.

$$
||f(v) - f(w)||_W \leq L \cdot ||v - w||_V, \quad |L > 0, \quad \forall v, w \in V
$$

19 Skalarprodukt

$$
(\gamma \cdot x + \lambda \cdot z,\, y) = \gamma \cdot (x,\, y) + \lambda \cdot (z,\, y), \quad \forall x, y, z \in V, \quad \forall \gamma, \lambda \in \mathbb{R}
$$

$$
\begin{aligned}
(y,\, x) &= (x,\, y), \quad \forall x, y \in V \\
(x,\, x) &> 0, \quad \forall x \neq 0 \\
(x,\, x) &= 0 \iff x = 0
\end{aligned}
$$

19.1 Cauchy-Schwarz Ungleichung

Wenn V ein reeller Vektorraum mit dem Skalarprodukt $(\cdot,\, \cdot)$ ist, dann gilt folgende Ungleichung.

$$
|(v,\, w)| \leq ||v||_2 \cdot ||w||_2, \quad \forall v, w \in V
$$

20 Vektorfolgen

Die Vektorfolge $\vec{a}_k$ nähert sich mit zunehmendem k dem Vektor $\vec{a}$ an. Die Folge kann analog zur Zahlenfolge aus Analysis 1 definiert werden (absolut, iterativ).

$$
\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \dots
$$

Wenn die Vektorfolge $\vec{a}_k$ zu $\vec{a}$ konvergiert, gelten folgende Ausdrücke.

$$
\begin{gathered}
||\vec{a}_k - \vec{a}|| < \varepsilon \\
\lim_{k \to \infty} \vec{a}_k = \vec{a}
\end{gathered}
$$

21 Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^m$

$$\vec{y} = \vec{f}\left(\vec{x}\right), \quad \vec{x} \in D, \quad \vec{y} \in M$$
$$\vec{f} : D \to M$$

$$\vec{f}\left(\vec{x}\right) = \begin{bmatrix} f_1\left(x_1, \ldots, x_n\right) \\ \vdots \\ f_m\left(x_1, \ldots, x_n\right) \end{bmatrix}$$

22 Stetigkeit in $\mathbb{R}^n$

Die Abbildung $\vec{f}$ wird im Punkt $\vec{x}_0$ als stetig in einem Punkt bezeichnet, wenn diese wenn diese für alle Folgen $\vec{x}_k$ zum gleichen Wert konvergiert. *Aka. Der Wert ist unabhängig von der Annäherungsrichtung der gleiche.*

$$\lim_{k \to \infty} \vec{f}\left(\vec{x}_k\right) = \vec{f}\left(\vec{x}_0\right)$$

Die Abbildung $\vec{f}$ wird auf A eine stetige Abbildung genannt, falls jeder Punkt in A als stetig bezeichnet werden kann.

$$\vec{f} : D \to M$$
$$A \subset D$$
$$\lim_{k \to \infty} \vec{f}\left(\vec{x}_k\right) = \vec{f}\left(\vec{x}_0\right), \quad \forall \vec{x}_k \in A$$

$$\int_a^b$$

23 ε-δ-Charakterisierung

Die Abbildung $\vec{f} : D \to M$ ist im Punkt $\vec{x}_0 \in D$ stetig, wenn folgende Ausdrücke wahr sind.

$$\vec{x}_0 \in D$$
$$\left|\left|\vec{x} - \vec{x}_0\right|\right|_D < \delta, \quad | \delta > 0$$
$$\left|\left|\vec{f}\left(\vec{x}\right) - \vec{f}\left(\vec{x}_0\right)\right|\right|_M < \varepsilon, \quad | \varepsilon > 0$$
$$\exists \left(\varepsilon, \delta\right)$$

24 Partielle Ableitung

$$\frac{\vartheta \vec{f}}{\vartheta x_k}\left(\vec{x}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}\left(x_1, \ldots, x_k + h, \ldots, x_n\right) - \vec{f}\left(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n\right)}{h}$$
$$\frac{\vartheta \vec{f}}{\vartheta x_k}\left(\vec{x}\right) \equiv \vartheta_{x_k} \vec{f}\left(\vec{x}\right) \equiv \vec{f}_{x_k}\left(\vec{x}\right)$$

25 Ableitungsmatrix (Jacobi-Matrix)

$$\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$D\vec{f}\left(\vec{x}_0\right) = \begin{bmatrix} \frac{\vartheta f_1}{\vartheta x_1} & \dots & \frac{\vartheta f_1}{\vartheta x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\vartheta f_m}{\vartheta x_1} & \dots & \frac{\vartheta f_m}{\vartheta x_n} \end{bmatrix}$$
$$D\vec{f}\left(\vec{x}_0\right) \equiv \vec{f}'\left(\vec{x}_0\right)$$
$$\vec{f}'\left(\vec{x}_0\right) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

25.1 Differenzierbarkeit

Die Abbildung $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wird im Punkt $\vec{x}_0 \in D$ als differenzierbar bezeichnet, wenn $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$ partiell differenzierbar ist und diese in der folgenden Form beschrieben werden kann und folgende Eigenschaft aufweist.

$$\vec{f}\left(\vec{x}\right) = \vec{f}\left(\vec{x}_0\right) + \vec{f}'\left(\vec{x}_0\right) \cdot \left(\vec{x} - \vec{x}_0\right) + \vec{k}\left(\vec{x}\right)$$
$$0 = \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{\left|\left|\vec{k}\left(\vec{x}\right)\right|\right|}{\left|\left|\vec{x} - \vec{x}_0\right|\right|}$$

Die Abbildung $\vec{f}$ wird in $A \subset D$ differenzierbare Abbildung bezeichnet, wenn $\vec{f}$ in jedem Punkt von A differenzierbar ist.

25.2 Kettenregel

$$D\left(\vec{f} \circ \vec{g}\right)\left(\vec{x}\right) = \left(D\vec{f} \circ \vec{g}\left(\vec{x}\right)\right) \cdot D\vec{g}\left(\vec{x}\right)$$

26 Richtungsableitung

$$\frac{\vartheta}{\vartheta \vec{a}} \vec{f}\left(\vec{x}_0\right) := \vec{f}'\left(\vec{x}_0\right) \cdot \vec{a}$$

27 Gradient

$$\operatorname{grad} f\left(\vec{x}\right) = Df\left(\vec{x}\right)^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} \vartheta_{x_1} f\left(\vec{x}\right) \\ \vdots \\ \vartheta_{x_n} f\left(\vec{x}\right) \end{bmatrix}$$
$$\vec{a} = \frac{\operatorname{grad} f\left(\vec{x}_0\right)}{\left|\operatorname{grad} f\left(\vec{x}_0\right)\right|} \implies \vec{a} \text{ maximal}$$

28 Totale Differential

$$\vec{f}'\left(\vec{x}_0\right) \cdot d\vec{x} = \sum_{K=1}^{n} \frac{\vartheta \vec{f}}{\vartheta x_k}\left(\vec{x}_0\right) dx_k$$

29 Höhere partielle Ableitungen

$$\frac{\vartheta}{\vartheta x_k}\left(\frac{\vartheta \vec{f}}{\vartheta x_i}\right)\left(\vec{x}\right) = \frac{\vartheta^2 \vec{f}}{\vartheta x_k \vartheta x_j}\left(\vec{x}\right) = \vec{f}_{x_k, x_j}\left(\vec{x}\right) = \vartheta_{x_k, x_j} \vec{f}\left(\vec{x}\right)$$

30 Nabla-Operator

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\vartheta}{\vartheta x_1} \\ \vdots \\ \frac{\vartheta}{\vartheta x_n} \end{bmatrix}$$
$$\text{grad}\,\vec{f}\,(x) = \nabla \vec{f}\,(x)$$

31 Hess'sche Matrix

$$\mathsf{H} = \nabla^2 = \begin{bmatrix} \frac{\vartheta^2}{\vartheta x_1 \vartheta x_1} & \cdots & \frac{\vartheta^2}{\vartheta x_1 \vartheta x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\vartheta^2}{\vartheta x_n \vartheta x_1} & \cdots & \frac{\vartheta^2}{\vartheta x_n \vartheta x_n} \end{bmatrix}$$
$$\left(\vec{h} \cdot \nabla\right)^2 \cdot f\,(\vec{x}) = \vec{h}^{\mathsf{T}} \cdot \mathsf{H} f\,(\vec{x}) \cdot \vec{h}$$

32 Taylorformel im $\mathbb{R}^n$

Es wird verlangt, dass die Abbildung $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in D $(p+1)$-mal stetig differenzierbar. Wenn die Stecke $\left[\vec{a},\, \vec{a} + \vec{h}\right]$ zusätzlich im inneren von D liegt, dann gilt folgende Taylorformel und das dazugehörige Restglied. *Der Vektor $\vec{a}$ kann als Entwicklungspunkt interpretiert werden und $\vec{h}$ als Abstand zum Entwicklungspunkt.*

$$\left[\vec{a},\, \vec{a} + \vec{h}\right] = \left\{\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{h} \,|\, 0 \leq t \leq 1\right\}$$
$$\vec{f}\left(\vec{a} + \vec{h}\right) = \vec{R}\left(\vec{a}, \vec{h}\right) + \vec{f}\,(\vec{a}) + \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{k!} \cdot \left(\vec{h} \cdot \nabla\right)^k \cdot \vec{f}\,(\vec{a})\right)$$
$$\vec{R}\left(\vec{a}, \vec{h}\right) = \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} \cdot \left(\vec{h} \cdot \nabla\right)^{p+1} \cdot \vec{f}\left(\vec{a} + t \cdot \vec{h}\right)\, dt$$

33 Divergenz

$$\text{div}\,\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\text{div}\,\vec{f}\,(\vec{x}) = \nabla \vec{f}\,(\vec{x}) = \frac{\vartheta f_1}{\vartheta x_1}(\vec{x}) + \cdots + \frac{\vartheta f_n}{\vartheta x_n}(\vec{x})$$

Felder die folgenden Eigenschaft aufweisen, werden als quellenfrei bezeichnet.

$$\text{div}\,\vec{f} = 0$$

34 Rotation

$$\text{rot}\,\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\text{rot}\,\vec{f}\,(\vec{x}) = \nabla \times \vec{f}\,(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \vartheta_{x_2} \cdot f_3\,(\vec{x}) - \vartheta_{x_3} \cdot f_2\,(\vec{x}) \\ \vartheta_{x_3} \cdot f_1\,(\vec{x}) - \vartheta_{x_1} \cdot f_3\,(\vec{x}) \\ \vartheta_{x_1} \cdot f_2\,(\vec{x}) - \vartheta_{x_2} \cdot f_1\,(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

Felder die folgenden Eigenschaft aufweisen, werden als wirbelfrei bezeichnet.

$$\text{rot}\,\vec{f} = 0$$

35 Produktregeln (Nabla, Divergenz, Rotation)

$$\nabla (f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$$
$$\operatorname{div}(f \cdot \vec{v}) = \nabla f \cdot \vec{v} + f \cdot \operatorname{div} \vec{v}$$
$$\operatorname{rot}(f \cdot \vec{v}) = \nabla f \times \vec{v} + f \cdot \operatorname{rot} \vec{v}$$

36 Laplace

$$\Delta f(\vec{x}) = \operatorname{div}(\nabla f(\vec{x})) = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x_1^2}(\vec{x}) + \cdots + \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x_n^2}(\vec{x})$$

$$\mathcal{L}\left(\alpha \cdot \vec{f} + \mathbf{g}\right) = \alpha \cdot \mathcal{L} \cdot \vec{f} + \mathcal{L}\mathbf{g}$$
$$\mathcal{L} \in \left\{ \frac{\vartheta}{\vartheta x_j}, D, \text{grad}, \nabla, \text{div}, \text{rot}, \mathsf{H}, \Delta \right\}$$

37 Newton-Verfahren im $\mathbb{R}^n$

Für das Newton-Verfahren ist eine Abbildung $\vec{f}$ gegen, für welche ein Punkt $\vec{x}_n$ gefunden werden soll, wobei $\vec{f}(\vec{x}_n) = \vec{0}$ erfüllt werden soll. Die Abbildung $\vec{g}$ beschreibt folgend die Linearisierung der Abbildung $\vec{f}$ im Punkt $\vec{x}_n$.

$$\vec{g}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + \vec{f}'(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

$$\vec{\delta}_n = \vec{f}'(\vec{x}_n)^{-1} \cdot \vec{f}(\vec{x}_n)$$
$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \vec{\delta}_n$$

38 Extremalprobleme ohne Nebenbedingungen

Eine Extremstelle muss folgenden Ausdruck erfüllen

$$\vec{f}'(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

und kann durch die folgende Fallunterscheidung als Maxima, Minima oder Sattelpunkt eingeordnet werden.

$$\begin{cases} \vec{z}^{\mathsf{T}} \cdot \mathsf{H}f(\vec{x}_0) \cdot \vec{z} < 0,\ \forall \vec{z} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}, & \vec{x}_0 \text{ ist eine echte Maximalstelle} \\ \vec{z}^{\mathsf{T}} \cdot \mathsf{H}f(\vec{x}_0) \cdot \vec{z} > 0,\ \forall \vec{z} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}, & \vec{x}_0 \text{ ist eine echte Minimalstelle} \\ \text{sonst}, & \vec{x}_0 \text{ist ein Sattelpunkt} \end{cases}$$

39 Symbole

- $\iff$: If and only if
- $\implies$: Implies
- $\equiv$: Equivalent
- $\forall$: For all
- $\exists$: Exists
- $\nearrow$: Approach from the right
- $\searrow$: Approach from the left