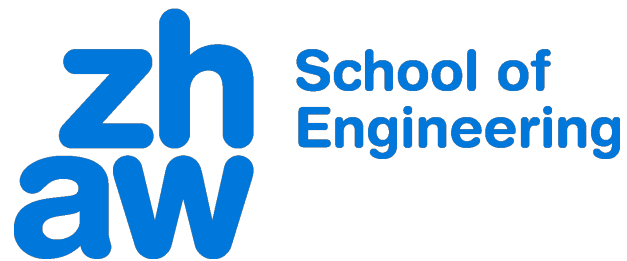


ZHAW Zurich University of Applied Sciences
Winterthur



Zusammenfassung SiSy

Studienwochen 1-14

Written by: Severin Sprenger
June 17, 2026
Zf. SiSy SW 1-14

1 Signalbeschreibung in Zeitbereich

1.1 Einheitssprung

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

1.2 Rechteck-Funktion

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$r_\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1.3 Dreieck-Puls

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{für } |t| < 1 \\ 0 & \text{für } |t| \geq 1 \end{cases}$$

1.4 DC-Signal

$$x(t) = 1$$

1.5 Sinc-Funktion

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi \cdot f_0 \cdot t)}{\pi \cdot f_0 \cdot t} & \text{für } t \neq 0 \\ 1 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

1.6 Dirac-Impuls

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tau} \cdot r_\tau(t) \right)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1.6.1 Eigenschaften

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t) dt = x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

1.7 Abfallende Exponentialfunktion

$$x(t) = u(t) \cdot \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \\ = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Nach $t = 5 \cdot \tau$ ist der Amplitudenwert $< 1 \%$ des Anfangswerts $\Rightarrow x(5 \cdot \tau) \approx 0$.

1.8 Harmonische Schwingungen

$$x_1(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) \\ x_2(t) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$x(t) = \exp(j \cdot \omega_0 \cdot t) \\ = \cos(\omega_0 \cdot t) + j \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\exp(j \cdot \alpha) + \exp(-j \cdot \alpha)}{2} \\ \sin(\alpha) = \frac{\exp(j \cdot \alpha) - \exp(-j \cdot \alpha)}{2 \cdot j}$$

1.9 Signum-Funktion

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \\ -1 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

1.10 Betragsfunktion

$$|x(t)| = x(t) \cdot \text{sgn}(x(t))$$

1.11 Normierte Signalleistung

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

1.12 Normierte Signalenergie

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

1.13 Effektivwert

$$X_{eff} = X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \cdot \int_{T_0} |x(t)|^2 dt}$$

1.14 Gerade (symmetrische) / Ungerade (anti-symmetrische) Funktionen

$$\begin{aligned} x(-t) &= x(t) \quad \forall t \implies \text{Gerade (symmetrische) Funktion} \\ x(-t) &= -x(t) \quad \forall t \implies \text{Ungerade (anti-symmetrische) Funktion} \end{aligned}$$

1.15 Skalierungen

- $x(t - \lambda)$: Zeitverschiebung
- $x(a \cdot t)$: Zeitskalierung
- $x(-t)$: Zeitspiegelung

1.16 Linearer Mittelwert (Gleichanteil)

$$X_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \right) = \overline{X}$$

1.17 Varianz & Standardabweichung

$$\begin{aligned} \text{var}(x(t)) &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_{T_0} (x(t) - X_0)^2 dt \\ \sigma &= \sqrt{\text{var}(x(t))} \end{aligned}$$

$$\text{var}(x(t)) = \sigma^2 = X^2 - X_0^2$$

2 Fourierreihe (diskret)

2.1 Sinus-/Cosinus-Darstellung

$$\begin{aligned} k &\in \mathbb{N} \\ s(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \\ A_k &= \frac{2}{T_0} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) dt \quad | \quad k \geq 1 \\ B_k &= \frac{2}{T_0} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) dt \quad | \quad k \geq 1 \\ S_0 &= \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) dt \end{aligned}$$

2.2 Rechtecksignal (anti-symmetrisch)

$$\begin{aligned} k &\in \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 2 \neq 0\} \\ s(t) &= \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{\forall k} \frac{1}{k} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \end{aligned}$$

2.3 Dreieck-Signal (symmetrisch)

$$\begin{aligned} k &\in \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 2 \neq 0\} \\ s(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{\forall k} \left(\frac{-4}{\pi^2 \cdot k^2} \right) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \end{aligned}$$

2.4 Abfallen der Amplituden der Harmonischen

- Jedes periodische Signal, das stetig ist, aber nicht-differenzierbare (Knick-) Stellen aufweist, enthält hochfrequente Harmonische, deren Amplituden mit $\frac{1}{k^2}$ abnehmen.
- Jedes periodische Signal, das unstetige (Sprung-) Stellen aufweist, enthält hochfrequente Harmonische, deren Amplituden mit $\frac{1}{k}$ abnehmen.

2.5 Gütekriterium für Approximationen

Es soll die Funktion s mit $A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$. Das Ziel ist es den Fehler von der Approximation zur eigentlichen Funktion zu minimieren.

$$\Delta = \int_{t_0}^{t_0+T_0} (s(t) - A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t))^2 dt$$

$$\frac{d\Delta}{dA_1} = 0 \implies \text{Wert für } A_1 \text{ ist optimal}$$

Diese Optimierung darf unabhängig von allen anderen Koeffizienten durchgeführt werden, da die harmonischen Schwingungen orthogonal (aka. unabhängig) sind.

$$n, m \in \mathbb{N}_0$$

$$\frac{1}{T_0} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_0 \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t) dt = \begin{cases} 0 & \text{wenn } m \neq n \\ 0.5 & \text{wenn } m = n \neq 0 \\ 1 & \text{wenn } m = n = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{T_0} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_0} \sin(2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_0 \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t) dt = \begin{cases} 0 & \text{wenn } m \neq n \\ 0 & \text{wenn } m = n = 0 \\ 0.5 & \text{wenn } m = n \neq 0 \end{cases}$$

2.6 Betrag-Phasen-Darstellung

$$k \in \mathbb{N}_0$$

$$s(t) = M_0 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t + \varphi_k)$$

$$M_0 = \frac{A_0}{2}$$

$$M_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \mid k > 0$$

$$\varphi_k = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right) & \text{für } A_k \geq 0 \\ -\arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right) \pm \pi & \text{für } A_k < 0 \mid k > 0 \end{cases}$$

Mit den Koeffizienten M_k und φ_k kann ein einseitiges Linienspektrum dargestellt werden, welches aus je einem Graphen für M_k und φ_k zusammengesetzt wird.

2.7 Komplexe Darstellung

$$\begin{aligned}
 k &\in \mathbb{Z} \\
 s(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \\
 c_0 &= \frac{A_0}{2} \\
 c_k &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) dt = c_{-k}^* \mid k \geq 0 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (A_k - j \cdot B_k)
 \end{aligned}$$

Mit den Koeffizienten c_k kann ein zweiseitiges Linienspektrum dargestellt werden, welches aus je einem Graphen für $|c_k|$ und $\arg(c_k)$ zusammengesetzt wird.

2.8 Leistungsberechnung im Frequenzbereich

$$\begin{aligned}
 \text{DC-Leistung: } P_0 &= M_0^2 = |c_0|^2 \left(\frac{A_0}{2} \right)^2 \\
 \text{AC-Leistung: } P_k &= \frac{M_k^2}{2} = |c_k|^2 + |c_{-k}|^2 = \frac{A_k^2 + B_k^2}{2} \mid k > 0 \\
 \text{Satz von Parseval: } P_n &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k
 \end{aligned}$$

2.9 Klirrfaktor

$$k = \frac{X_{eff-Oberschwingung}}{X_{eff}}$$

$X_{eff-Oberschwingung} \rightarrow$ RMS-Wert ohne Grundschwingung

3 Fouriertransformation (kontinuierlich)

$$S(f) = \lim_{f_0 \rightarrow 0} \left(\frac{c_k}{f_0} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}: S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt \\
 \mathfrak{F}^{-1}: s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) df \\
 S(f) &= \underbrace{|S(f)|}_{\text{Betragsspektrum}} \cdot \exp(j \cdot \underbrace{\varphi(f)}_{\text{Phasenspektrum}})
 \end{aligned}$$

3.1 Eigenschaften

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a \cdot s_1(t) + b \cdot s_2(t) \iff X(f) = a \cdot S_1(f) + b \cdot S_2(f) \\
 x(t) &= s(t - t_0) \iff X(f) \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0) \\
 x(t) &= s(a \cdot t) \iff X(f) = \frac{1}{|a|} \cdot S\left(\frac{f}{a}\right) \\
 x(t) &= s(t) \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \iff X(f) = S(f - f_0) \\
 \frac{d^n}{dt^n} s(t) &\iff (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^n \cdot S(f) \\
 \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau &\iff \frac{S(f)}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} + \frac{1}{2} \cdot S(0) \cdot \delta(f) \\
 x(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau \iff X(f) \cdot Y(f)
 \end{aligned}$$

$$s(t) \rightarrow S(f) \xrightarrow{f \leftrightarrow t} S(t) \rightarrow s(-f)$$

Amplitudenmodulation:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= s(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot t) \\
 Y(f) &= \frac{1}{2} \cdot (S(f - f_c) + S(f + f_c))
 \end{aligned}$$

Symmetrien

$$\begin{aligned}
 s(t) \text{ reell} &\iff S(-f) = S^*(f) \\
 s(t) \text{ reell, ungerade} &\iff S(f) \text{ imaginär} \\
 s(t) \text{ reell, gerade} &\iff S(f) \text{ reell}
 \end{aligned}$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \iff S(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \delta(f - k \cdot f_0)$$

3.2 Zeit-Bandbreite-Produkt

Das Zeit-Bandbreite-Produkt ist eine Konstante.

$$\tau \cdot B \approx 1 \implies B = \frac{1}{\tau}$$

3.3 Signalenergie

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

3.4 Wichtige Fouriertransformationen

$$\begin{aligned}
 \delta(t) &\Longleftrightarrow \mathfrak{F}[\delta(t)](f) = 1 \\
 1 &\Longleftrightarrow \mathfrak{F}[1](f) = \delta(f) \\
 s(t) &= \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow S(f) = \tau \cdot \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \tau)}{\pi \cdot f \cdot \tau} \\
 s(t) &= \begin{cases} \frac{1}{\tau} \cdot \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow S(f) = \frac{1}{1 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} \\
 s(t) &= \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \Longleftrightarrow S(f) = \frac{1}{2} \cdot (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)) \\
 s(t) &= \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \Longleftrightarrow S(f) = \frac{j}{2} \cdot (\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0))
 \end{aligned}$$

4 dB-Rechnen

$$\text{für Spannungen: } 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_1}{U_0} \right)$$

$$\text{für Ströme: } 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_0} \right)$$

$$\text{für Leistungen: } 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_1}{P_0} \right)$$

$$\text{dBm} \Rightarrow 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_1}{1 \text{ mW}} \right)$$

$$\text{dBW} \Rightarrow 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_1}{1 \text{ W}} \right)$$

$$\text{dBV} \Rightarrow 10 \cdot \log_{20} \left(\frac{U_1}{1 \text{ V}} \right)$$

$$\text{dBmV} \Rightarrow 10 \cdot \log_{20} \left(\frac{U_1}{1 \text{ mV}} \right)$$

5 LTI-Systeme

Lineare Systeme generieren keine neuen Frequenzkomponenten die nicht im Eingangssignal vorhanden sind (*können Frequenzkomponenten jedoch blockieren*).

Ein zeitinvariantes System produziert unabhängig von einer Zeitverschiebung des Eingangssignals das gleiche Ausgangssignal.

Ein kausales System kann nicht vor dem Anlegen des Eingangssignals mit einem Ausgangssignal reagieren.

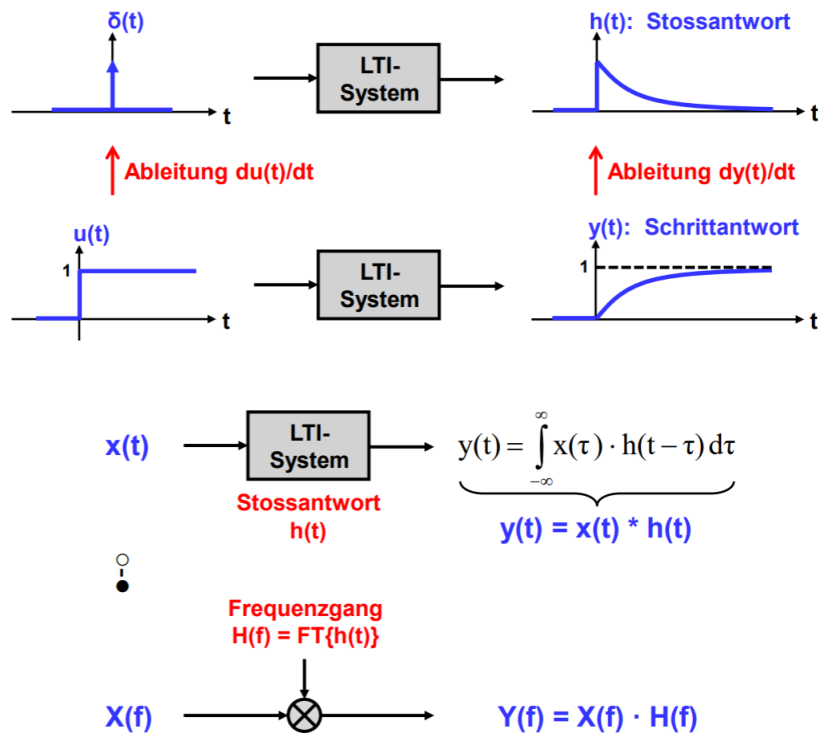
LTI-Systeme sind linear und zeitinvariant. Ideale Systeme (mathematisch definierte) können auch nicht-kausal sein.

5.1 Faltung

$$(s_1 * s_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(u) \cdot s_2(t - u) du$$

5.2 Bestimmen der Übergangsfunktion

$$x(t) = \delta(t) \implies y(t) = h(t)$$



$$|H(f)| = \frac{|Y(f)|}{|X(f)|}$$

$$\varphi_H(f) = \varphi_Y(f) - \varphi_X(f)$$

5.3 Harmonisches Eingangssignal

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$$

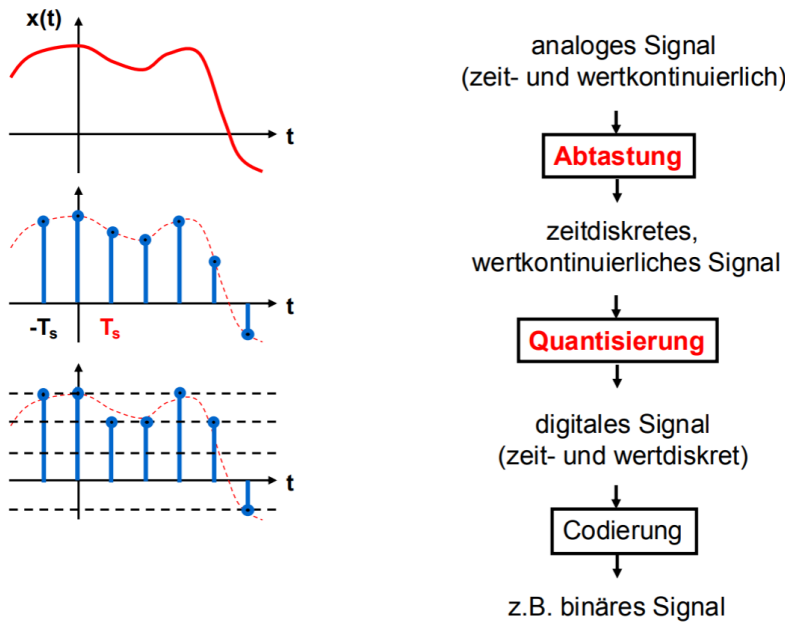
$$y(t) = |H(f_0)| \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi(f_0))$$

5.4 Parallelschaltung von LTI-Systemen

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

$$H(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

6 ADC



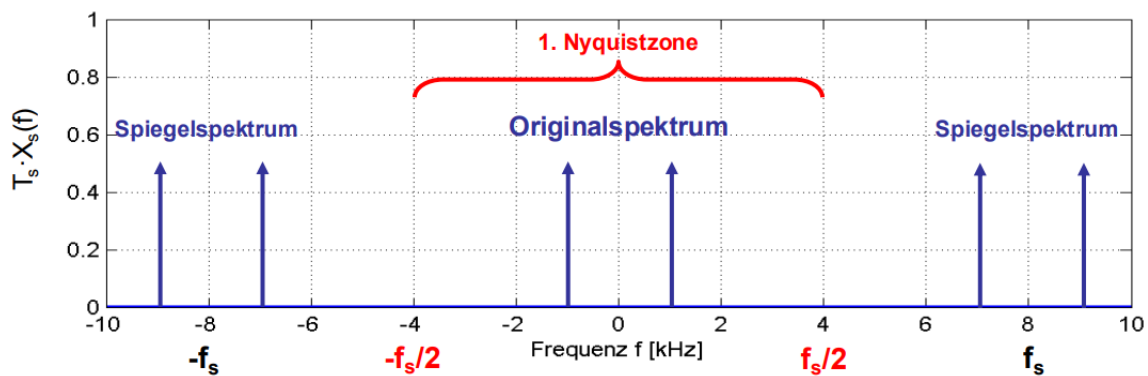
6.1 Ideale Abtastung

$$x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_s)$$

$$X_s(f) = X(f) * \left(\frac{1}{T_s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n \cdot f_s) \right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_s \cdot t)$$

$$\Rightarrow X_s(f) = \frac{1}{T_s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n \cdot f_s)$$



6.2 SHA (Sample-and-Hold-Amplifier)

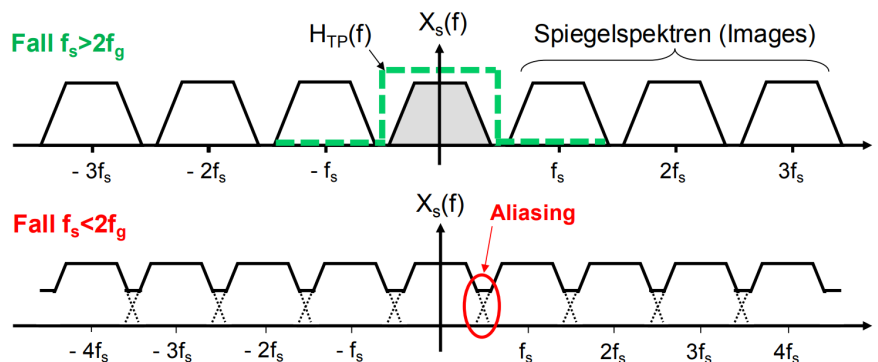
Bei SHA wird durch einen elektronischen Schalter das Eingangssignal mit der Frequenz f_s in einem Kondensator gespeichert und durch einen Verstärker (Impedanzwandler) minimalbelastet und den ADC Encoder geschaltet. Dieser Ansatz stellt sicher, dass sich das Eingangssignal den ADC Encoders nur minimal verändert (*Kondensator Selbstentladung / Eingangswiderstand des Verstärkers*).

6.3 SAR (Successive Approximation)

Beim SAR vorgehen wird das Eingangssignal mit einem internen approximations Signal verglichen (z.B.: *durch Interner DAC oder Widerstandsleiter*). Durch das einstellen dieses internen approximations Signals von MSB zu LSB kann das Eingangssignal nachgebildet werden und somit eine digitaler Wert bestimmt werden.

6.4 Aliasing (Begriff)

Aliasing tritt dann auf wenn die Spiegelspektren des Konvertierten Signals und das Original Spektrum sich überschneiden (*aka. Wenn Nyquist nicht erfüllt wird*).



Um Aliasing zu verhindern sollte vor dem ADC ein Anti-Aliasing-Filter verbaut werden, welcher Frequenzen $> \frac{f_s}{2}$ aus dem Eingangssignal filtert.

6.5 Rekonstruktion (Begriff)

Da es sich bei einem Ausgangssignals eines DACs immer noch um ein wertdiskretes Signal handelt, sollte der DAC Ausgang mit einem Post-Filter versehen werden, welcher Frequenzen $> \frac{f_s}{2}$ aus dem Ausgangssignal filtert.

6.6 Ideale Rekonstruktion

Eine ideale Rekonstruktion setzt einen idealen Tiefpass voraus, welcher über eine Stossantwort in Form einer $\text{sinc}()$ aufweist.

Wenn $x_s(t)$ ein ideal abgetastetes Signal ist, kann die ideale Rekonstruktion mathematisch folgend beschrieben werden.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s(n \cdot T_s) \cdot \frac{\sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{f_s}{2} \cdot (t - n \cdot T_s)\right)}{2 \cdot \pi \cdot \frac{f_s}{2} \cdot (t - n \cdot T_s)}$$

6.7 Reale Rekonstruktion

Bei der realen Rekonstruktion wird ein DAC mit ZOH (Zero-Order-Hold) eingesetzt. Diese ZOH Funktion stellt sicher, dass keine zusätzlichen Frequenzen, ausser f_s , hinzugefügt werden. Dies ermöglicht dann, dass ein reales Filter eingesetzt werden kann ohne die Signalqualität einzuschränken. Die ZOH Funktion kann mathematisch folgend beschrieben werden.

$$h_{ZOH}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq T_s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_{ZOH}(f) = T_s \cdot \frac{\sin\left(\pi \cdot \frac{f}{f_s}\right)}{\pi \cdot \frac{f}{f_s}} \cdot \exp\left(-j \cdot \pi \cdot \frac{f}{f_s}\right)$$

6.8 Quantisierung

Bei der Quantisierung wird A als der Ansteuerungsbereich (Full-scale), Δ als die Quantisierungsstufe und W als die Wortbreite bezeichnet. Ebenfalls kann mit ϵ der Quantisierungsfehler beschrieben werden.

$$\Delta = \frac{A}{2^W}$$

$$\epsilon(n \cdot T_s) = x(n \cdot T_s) - x_Q(n \cdot T_s), \quad \in \left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right]$$

Mit dem Quantisierungsfehler kann auch das Signal-zu-Quantisierungsrauschen (SNR) bestimmt werden.

$$P_\epsilon = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$\text{SNR} = \frac{P_x}{P_\epsilon}$$

$$= 6.02 \cdot W + 10 \cdot \log_{10} \left(12 \cdot \frac{P_x}{A^2} \right) \quad \text{in dB}$$

$$= 6 \cdot W + 1.76 + 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{A_0}{A_{FS}} \right) \quad \text{in dB}$$

Wenn die Wortbreite um 1 Bit erhöht wird, so wird das SNR 4-Mal grösser oder um 6 dB erhöht.

$$10 \cdot \log_{10}(\text{SNR}_{W+1}) = 10 \cdot \log_{10}(4 \cdot \text{SNR}_W) = 10 \cdot \log_{10}(\text{SNR}_W) + 6 \text{ dB}$$

6.9 Aperture Jitter

Unter Aperture Jitter versteht man die Abweichung des abgetasteten Signals zum originalen Signal aufgrund von Konvertierungszeiten und kann wie folgt bei einem harmonischen Eingangssignal berechnet werden.

$$\text{SNR}_j = -20 \cdot \log_{10}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_j)$$

6.10 Clock Sampling Jitter

Unter Clock Sampling Jitter versteht man den Fehler der durch eine Variation in der Samplingfrequenz entsteht.

7 Fouriertransformation (diskret)

Folgend beschreibt x ein Signal das diskret mit einer Frequenz von f_s abgetastet wurde. Die Zeitdifferenz aller Elemente in x ist somit $T_s = \frac{1}{f_s}$. Das Spektrum X approximiert das Frequenzspektrum des in x abgetastete Signal s .

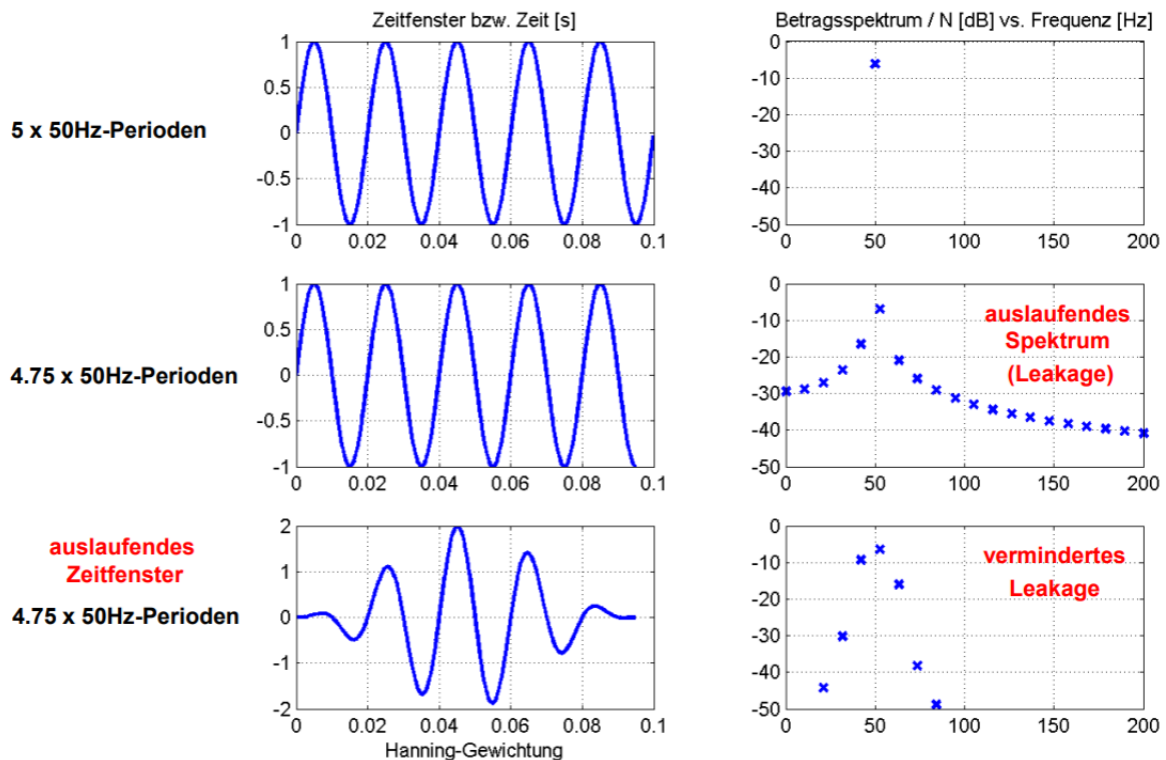
$$\begin{aligned}
 m &\in [0, N-1] \\
 X[m] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left(-j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot m \cdot n\right) \\
 f[m] &= \frac{m \cdot f_s}{N}, \quad \in [0, f_s[\\
 X[0] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot 1 \\
 \Delta f &= \frac{f_s}{N} \\
 \text{Normierte DFT: } c_m &= \frac{X[m]}{N}
 \end{aligned}$$

7.1 Berechnung mit linearer Algebra

$$\begin{aligned}
 M_{DFT} &\in \mathbb{C}^{N \times N} \\
 M_{DFT} &= \exp\left(-j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot n \cdot m\right) \\
 \begin{bmatrix} X[1] \\ \vdots \\ X[N] \end{bmatrix} &= M_{DFT} \cdot \begin{bmatrix} x[1] \\ \vdots \\ x[N] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

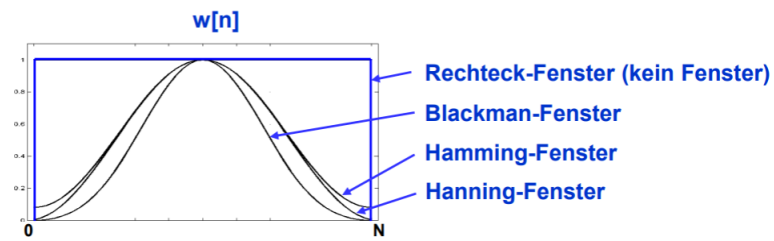
7.2 Leakage

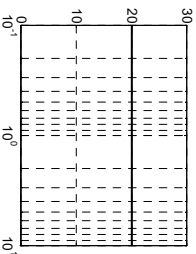
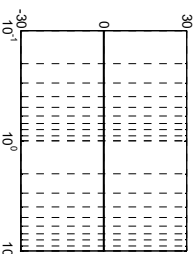
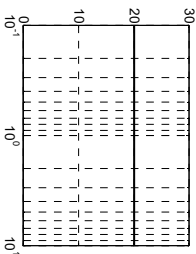
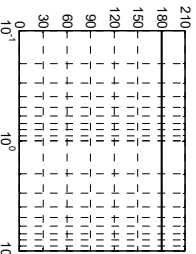
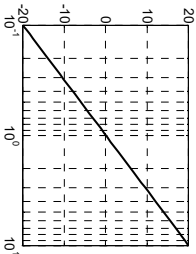
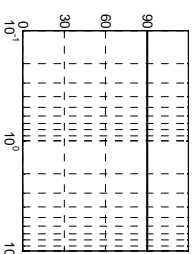
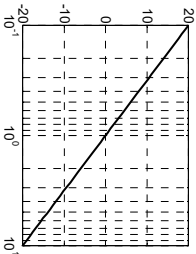
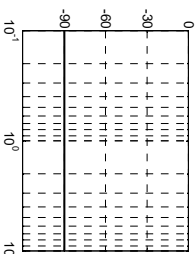
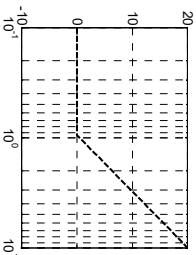
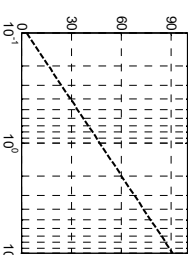
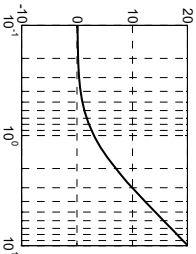
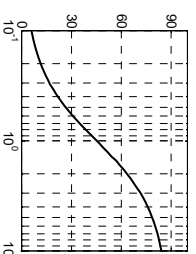
Leakage beschreibt das Auftreten von Frequenzkomponenten die nicht Teil des analysierten Signals sind und durch unpassende Fensterlängen hervorgerufen werden. Ein Fenster bezeichnet man dann als unangepasst, wenn das Signal am Ende des Fensters nicht mit dem Signal am Start des Fensters übereinstimmt. Somit beinhaltet das Signal einen künstlichen Sprung der zu Leakage führt.

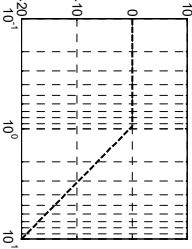
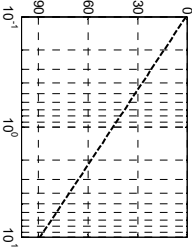
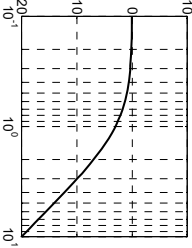
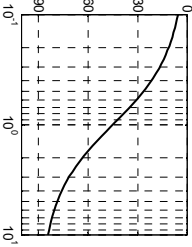
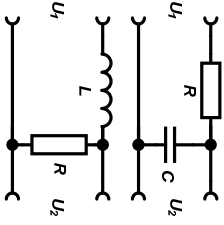
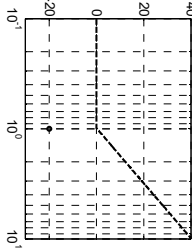
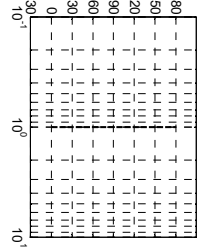
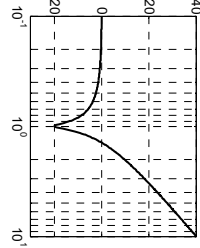
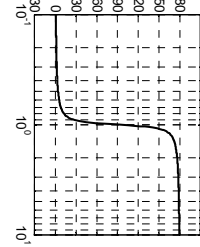
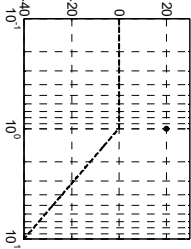
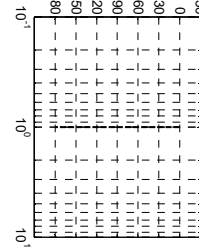
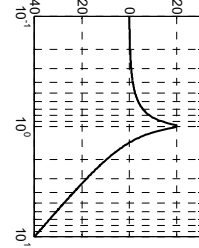
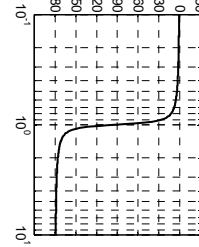
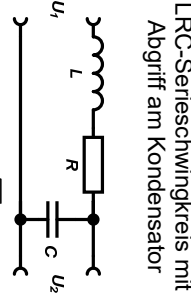
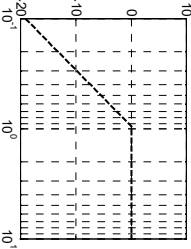
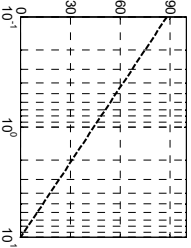
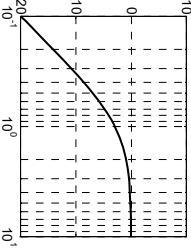
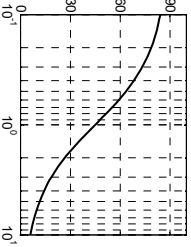
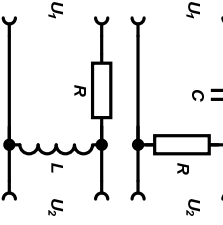


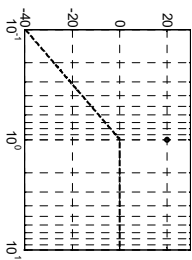
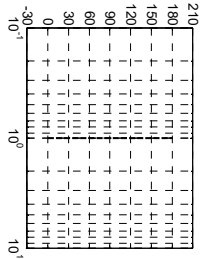
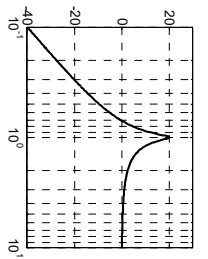
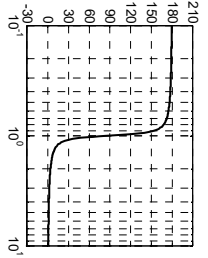
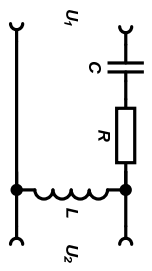
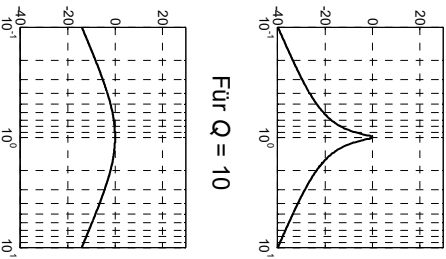
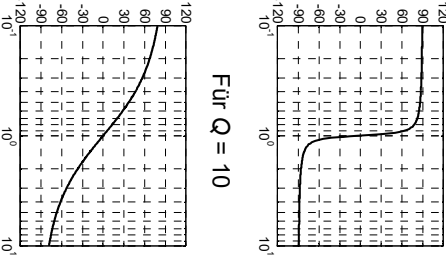
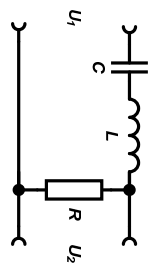
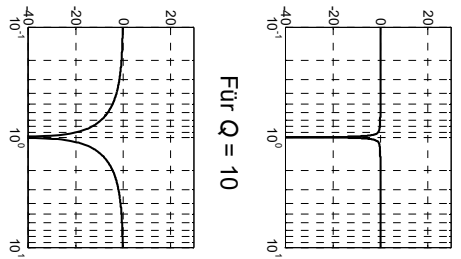
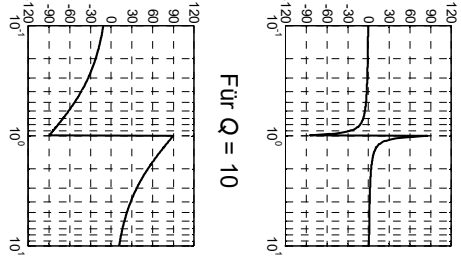
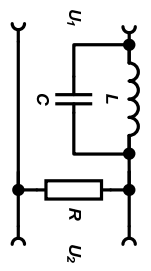
7.3 Optimierte Fensterung

Verschiedene Fensterungen können, soweit angepasst auf die Anwendung, Leakage reduzieren. Diese Fensterung bewirkt, dass Samples verschieden gewichtet werden, basiert auf eine von mehreren Verteilungen.



Elementare Frequenzgangfunktionen (nicht weiter zerlegbar)						
Bezeichnung	Frequenzgangfunktion $H(\Omega)$ mit $\Omega = \omega/\omega_0$	Konstruktion im Bode-Diagramm: Amplitudengang in dB (x-Achse: Ω)	Konstruktion im Bode-Diagramm: Phasengang in Grad (x-Achse: Ω)	Bode-Diagramm: Amplitudengang in dB (x-Achse: Ω)	Bode-Diagramm: Phasengang in Grad (x-Achse: Ω)	Schaltung
Konstanter Faktor $k > 0$	k	Verschiebung um $20 \cdot \log_{10} k$	Kein Einfluss	 Für $k = 10$	 Für $k = 10$	Nicht-invertierender Verstärker (realisierbar z.B. mit Operationsverstärker)
konstanter Faktor $k < 0$	k	Verschiebung um $20 \cdot \log_{10} k $	$\pm 180^\circ$ addieren (Winkel soll möglichst klein werden)	 Für $k = -10$	 Für $k = -10$	Invertierender Verstärker (realisierbar z.B. mit Operationsverstärker)
Differentierglied	$j\Omega$	Siehe Bode-Diagramm	Siehe Bode-Diagramm			Nicht physikalisch, zwar gilt z.B. $I = j\omega C \cdot \underline{U}$ aber beim Einschalten würde ein unendlich hoher Strom fließen. Jedoch ist eine Näherung mit sehr kleinem Serienwiderstand möglich.
Integrierglied	$\frac{1}{j\Omega}$	Siehe Bode-Diagramm	Siehe Bode-Diagramm			Verhältnis von Strom zur Spannung an der Spule: $I = \frac{U}{j\omega L}$
Glied 1. Ordnung	$1 + j\Omega$					Nicht physikalisch, Näherung jedoch möglich (aktive Schaltung mit Verstärker)

Glied 1. Ordnung, Tiefpass	$\frac{1}{1+j\Omega} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{R}{L}$					
Glied 2. Ordnung für $Q > 1/2$ (sonst zerlegbar)	$1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2$	 Für $Q = 10$, Spitze bei $20 \cdot \log_{10} Q$ tiefer	 Für $Q = 10$	 Für $Q = 10$	 Für $Q = 10$	Nicht physikalisch, Näherung jedoch möglich (aktive Schaltung mit Verstärker)
Glied 2. Ordnung für $Q > 1/2$ (sonst zerlegbar)	$\frac{1}{1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	 Für $Q = 10$, Spitze bei $20 \cdot \log_{10} Q$ höher	 Für $Q = 10$	 Für $Q = 10$	 Für $Q = 10$	LRC-Serieschwingkreis mit Abgriff am Kondensator  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$
Zerlegbare Frequenzgangfunktionen						
Hochpass	$\frac{j\Omega}{1 + j\Omega}$ Nenner und Zähler haben dasselbe Ω, ω_0 wie beim Tiefpass					
Glied 2. Ordnung für $Q \leq 1/2$	$1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2 = (1 + j\Omega \omega_1) \cdot (1 + j\Omega \omega_2) = (1 + j\omega/\omega_1) \cdot (1 + j\omega/\omega_2) \quad \text{mit} \quad \omega_{1,2} = \omega_0 \left(\frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right)$ Diese Faktorisierung liefert elementare Teilglieder, sodass das entsprechende Bodediagramm durch Addition elementarer Bodediagramme bestimmt werden kann.					

LRC-Schwingkreis mit Abgriff an der Spule	$\frac{(j\Omega)^2}{1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	 Für $Q = 10$, Spitze bei $20 \cdot \log_{10} Q$ höher	 Für $Q = 10$	 Für $Q = 10$	 Für $Q = 10$	 $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$
Bandpass	$\frac{1}{Q} \frac{j\Omega}{1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	Skizze über Teilglieder Je nach Q ergibt sich eine andere Bandbreite, bei ω_0 ist jedoch immer 0 dB Weit entfernt von ω_0: ± 20 dB/Dk Definition Bandbreite B: Frequenzbereich von -3 dB bis +3 dB Es gilt: $B = \omega_0 / Q$	Skizze über Teilglieder	 Für $Q = 10$	 Für $Q = 10$	LRC-Schwingkreis mit Abgriff am Widerstand  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$
Bandsperr	$\frac{1 + (j\Omega)^2}{1 + j\Omega \frac{1}{Q} + (j\Omega)^2}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	Skizze über Teilglieder Der Zähler ist ein Glied 2. Ordnung mit $Q = \infty$, deshalb ist die Dämpfung bei der Mittenfrequenz theoretisch unendlich Bandbreite wie beim Bandpass	Skizze über Teilglieder	 Für $Q = 10$	 Für $Q = 10$	LC-Parallelschwingkreis mit Seriewiderstand  $Q = R \sqrt{\frac{C}{L}}$

Hinweise: Beim Einsatz von Spulen sind obige Darstellungen nur passend, wenn die Spulenverluste vernachlässigbar sind; «nicht physikalisch» = kann mit einer Schaltung aus R , L und C nicht exakt nachgebildet werden; die obige Aufstellung ist nicht abschliessend, sondern exemplarisch (es gibt viele weitere Schaltungen mit gleichen Frequenzgängen)