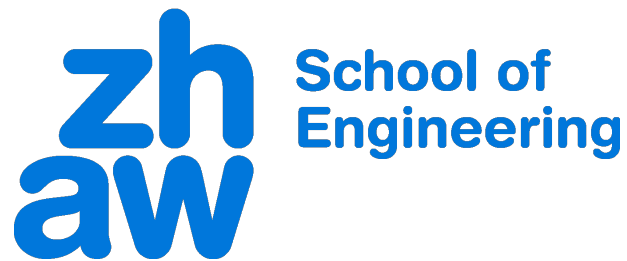


ZHAW Zurich University of Applied Sciences
Winterthur



Zusammenfassung SiSy

Studienwochen 1-7

Written by: Severin Sprenger
November 12, 2025
Zf. SiSy SW 1-7

1 Signalbeschreibung in Zeitbereich

1.1 Einheitssprung

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

1.2 Rechteck-Funktion

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$r_\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1.3 Dreieck-Puls

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{für } |t| < 1 \\ 0 & \text{für } |t| \geq 1 \end{cases}$$

1.4 DC-Signal

$$x(t) = 1$$

1.5 Sinc-Funktion

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi \cdot f_0 \cdot t)}{\pi \cdot f_0 \cdot t} & \text{für } t \neq 0 \\ 1 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

1.6 Dirac-Impuls

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tau} \cdot r_\tau(t) \right)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1.6.1 Eigenschaften

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t) dt = x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

1.7 Abfallende Exponentialfunktion

$$x(t) = u(t) \cdot \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \\ = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Nach $t = 5 \cdot \tau$ ist der Amplitudenwert $< 1 \%$ des Anfangswerts $\Rightarrow x(5 \cdot \tau) \approx 0$.

1.8 Harmonische Schwingungen

$$x_1(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) \\ x_2(t) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$x(t) = \exp(j \cdot \omega_0 \cdot t) \\ = \cos(\omega_0 \cdot t) + j \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\exp(j \cdot \alpha) + \exp(-j \cdot \alpha)}{2} \\ \sin(\alpha) = \frac{\exp(j \cdot \alpha) - \exp(-j \cdot \alpha)}{2 \cdot j}$$

1.9 Signum-Funktion

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \\ -1 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

1.10 Betragsfunktion

$$|x(t)| = x(t) \cdot \text{sgn}(x(t))$$

1.11 Normierte Signalleistung

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

1.12 Normierte Signalenergie

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

1.13 Effektivwert

$$X_{eff} = X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \cdot \int_{T_0} |x(t)|^2 dt}$$

1.14 Gerade (symmetrische) / Ungerade (anti-symmetrische) Funktionen

$$\begin{aligned} x(-t) &= x(t) \quad \forall t \implies \text{Gerade (symmetrische) Funktion} \\ x(-t) &= -x(t) \quad \forall t \implies \text{Ungerade (anti-symmetrische) Funktion} \end{aligned}$$

1.15 Skalierungen

- $x(t - \lambda)$: Zeitverschiebung
- $x(a \cdot t)$: Zeitskalierung
- $x(-t)$: Zeitspiegelung

1.16 Linearer Mittelwert (Gleichanteil)

$$X_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \right) = \overline{X}$$

1.17 Varianz & Standardabweichung

$$\begin{aligned} \text{var}(x(t)) &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_{T_0} (x(t) - X_0)^2 dt \\ \sigma &= \sqrt{\text{var}(x(t))} \end{aligned}$$

$$\text{var}(x(t)) = \sigma^2 = X^2 - X_0^2$$

2 Fourierreihe (diskret)

2.1 Sinus-/Cosinus-Darstellung

$$\begin{aligned} k &\in \mathbb{N} \\ s(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \\ A_k &= \frac{2}{T_0} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) dt \quad | \quad k \geq 1 \\ B_k &= \frac{2}{T_0} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) dt \quad | \quad k \geq 1 \\ S_0 &= \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) dt \end{aligned}$$

2.2 Rechtecksignal (anti-symmetrisch)

$$\begin{aligned} k &\in \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 2 \neq 0\} \\ s(t) &= \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{\forall k} \frac{1}{k} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \end{aligned}$$

2.3 Dreieck-Signal (symmetrisch)

$$\begin{aligned} k &\in \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 2 \neq 0\} \\ s(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{\forall k} \left(\frac{-4}{\pi^2 \cdot k^2} \right) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \end{aligned}$$

2.4 Abfallen der Amplituden der Harmonischen

- Jedes periodische Signal, das stetig ist, aber nicht-differenzierbare (Knick-) Stellen aufweist, enthält hochfrequente Harmonische, deren Amplituden mit $\frac{1}{k^2}$ abnehmen.
- Jedes periodische Signal, das unstetige (Sprung-) Stellen aufweist, enthält hochfrequente Harmonische, deren Amplituden mit $\frac{1}{k}$ abnehmen.

2.5 Gütekriterium für Approximationen

Es soll die Funktion s mit $A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$. Das Ziel ist es den Fehler von der Approximation zur eigentlichen Funktion zu minimieren.

$$\Delta = \int_{t_0}^{t_0+T_0} (s(t) - A_1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t))^2 dt$$

$$\frac{d\Delta}{dA_1} = 0 \implies \text{Wert für } A_1 \text{ ist optimal}$$

Diese Optimierung darf unabhängig von allen anderen Koeffizienten durchgeführt werden, da die harmonischen Schwingungen orthogonal (aka. unabhängig) sind.

$$n, m \in \mathbb{N}_0$$

$$\frac{1}{T_0} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_0 \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t) dt = \begin{cases} 0 & \text{wenn } m \neq n \\ 0.5 & \text{wenn } m = n \neq 0 \\ 1 & \text{wenn } m = n = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{T_0} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_0} \sin(2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_0 \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t) dt = \begin{cases} 0 & \text{wenn } m \neq n \\ 0 & \text{wenn } m = n = 0 \\ 0.5 & \text{wenn } m = n \neq 0 \end{cases}$$

2.6 Betrag-Phasen-Darstellung

$$k \in \mathbb{N}_0$$

$$s(t) = M_0 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t + \varphi_k)$$

$$M_0 = \frac{A_0}{2}$$

$$M_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \mid k > 0$$

$$\varphi_k = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right) & \text{für } A_k \geq 0 \\ -\arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right) \pm \pi & \text{für } A_k < 0 \mid k > 0 \end{cases}$$

Mit den Koeffizienten M_k und φ_k kann ein einseitiges Linienspektrum dargestellt werden, welches aus je einem Graphen für M_k und φ_k zusammengesetzt wird.

2.7 Komplexe Darstellung

$$\begin{aligned}
 k &\in \mathbb{Z} \\
 s(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \\
 c_0 &= \frac{A_0}{2} \\
 c_k &= \frac{1}{T_0} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_0} s(t) \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) dt = c_{-k}^* \mid k \geq 0 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (A_k - j \cdot B_k)
 \end{aligned}$$

Mit den Koeffizienten c_k kann ein zweiseitiges Linienspektrum dargestellt werden, welches aus je einem Graphen für $|c_k|$ und $\arg(c_k)$ zusammengesetzt wird.

2.8 Leistungsberechnung im Frequenzbereich

$$\begin{aligned}
 \text{DC-Leistung: } P_0 &= M_0^2 = |c_0|^2 \left(\frac{A_0}{2} \right)^2 \\
 \text{AC-Leistung: } P_k &= \frac{M_k^2}{2} = |c_k|^2 + |c_{-k}|^2 = \frac{A_k^2 + B_k^2}{2} \mid k > 0 \\
 \text{Satz von Parseval: } P_n &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k
 \end{aligned}$$

2.9 Klirrfaktor

$$k = \frac{X_{eff-Oberschwingung}}{X_{eff}}$$

$X_{eff-Oberschwingung} \rightarrow$ RMS-Wert ohne Grundschwingung

3 Fouriertransformation (kontinuierlich)

$$\begin{aligned}
 S(f) &= \lim_{f_0 \rightarrow 0} \left(\frac{c_k}{f_0} \right) \\
 \mathfrak{F}: S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) dt \\
 \mathfrak{F}^{-1}: s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) df \\
 S(f) &= \underbrace{|S(f)|}_{\text{Betragsspektrum}} \cdot \exp(j \cdot \underbrace{\varphi(f)}_{\text{Phasenspektrum}})
 \end{aligned}$$

3.1 Eigenschaften

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a \cdot s_1(t) + b \cdot s_2(t) \iff X(f) = a \cdot S_1(f) + b \cdot S_2(f) \\
 x(t) &= s(t - t_0) \iff X(f) \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0) \\
 x(t) &= s(a \cdot t) \iff X(f) = \frac{1}{|a|} \cdot S\left(\frac{f}{a}\right) \\
 x(t) &= s(t) \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \iff X(f) = S(f - f_0) \\
 \frac{d^n}{dt^n} s(t) &\iff (j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^n \cdot S(f) \\
 \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau &\iff \frac{S(f)}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} + \frac{1}{2} \cdot S(0) \cdot \delta(f) \\
 x(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau \iff X(f) \cdot Y(f)
 \end{aligned}$$

$$s(t) \rightarrow S(f) \xrightarrow{f=-t} S(t) \rightarrow s(-f)$$

Amplitudenmodulation:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= s(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot t) \\
 Y(f) &= \frac{1}{2} \cdot (S(f - f_c) + S(f + f_c))
 \end{aligned}$$

Symmetrien

$$\begin{aligned}
 s(t) \text{ reell} &\iff S(-f) = S^*(f) \\
 s(t) \text{ reell, ungerade} &\iff S(f) \text{ imaginär} \\
 s(t) \text{ reell, gerade} &\iff S(f) \text{ reell}
 \end{aligned}$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t) \iff S(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \delta(f - k \cdot f_0)$$

3.2 Zeit-Bandbreite-Produkt

Das Zeit-Bandbreite-Produkt ist eine Konstante.

$$\tau \cdot B \approx 1 \implies B = \frac{1}{\tau}$$

3.3 Signalenergie

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

3.4 Wichtige Fouriertransformationen

$$\begin{aligned}
 \delta(t) &\Longleftrightarrow \mathfrak{F}[\delta(t)](f) = 1 \\
 1 &\Longleftrightarrow \mathfrak{F}[1](f) = \delta(f) \\
 s(t) &= \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow S(f) = \tau \cdot \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \tau)}{\pi \cdot f \cdot \tau} \\
 s(t) &= \begin{cases} \frac{1}{\tau} \cdot \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow S(f) = \frac{1}{1 + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} \\
 s(t) &= \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \Longleftrightarrow S(f) = \frac{1}{2} \cdot (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)) \\
 s(t) &= \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \Longleftrightarrow S(f) = \frac{j}{2} \cdot (\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0))
 \end{aligned}$$

4 dB-Rechnen

$$\text{für Spannungen: } 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_1}{U_0} \right)$$

$$\text{für Ströme: } 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_0} \right)$$

$$\text{für Leistungen: } 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_1}{P_0} \right)$$

$$\text{dBm} \Rightarrow 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_1}{1 \text{ mW}} \right)$$

$$\text{dBW} \Rightarrow 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_1}{1 \text{ W}} \right)$$

$$\text{dBV} \Rightarrow 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_1}{1 \text{ V}} \right)$$

$$\text{dBmV} \Rightarrow 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_1}{1 \text{ mV}} \right)$$